Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (N, s, α) ein System natürlicher Zahlen. Zeige:

(a) Es gilt $N = \mathrm{Im}(s) \cup \{0\}$.

(b) Für jedes $n \in N$ gilt $s(n) \neq n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Benutze das allgemeine Rekursionsprinzip, um folgende informell gegebene Funktionen zu konstruieren:

(a) Die Potenzfunktion

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n,k) \mapsto n^k = \underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{k \text{ mal}}.$$

(b) Die Fakultätsfunktion

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

(c) Die Fibonacci-Folge

$$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Benutze die Defintion von Multiplikation und Addition, um direkt $3 \cdot 3 = 9$ zu zeigen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei M eine endliche Menge mit einer partiellen Ordnungsrelation $\leq$ auf M.

(a) Zeige, dass ein minimales Element in M bezüglich $\leq$ gibt. Ist $\leq$ total, so gibt es sogar ein kleinstes Element.

(b) Folgere: Falls $\leq$ total ist, gibt es genau eine Bijektion $f : \{1, \ldots, |M|\} \to M$ mit $k \leq k' \Rightarrow f(k) \leq f(k')$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Konstruiere für jedes der drei Peano-Axiome eine Menge N, ein Element $\alpha \in N$ sowie eine Funktion $s : N \to N$ sodass das entsprechende Axiom *nicht* erfüllt ist, aber die anderen beiden Axiome erfüllt sind.