Aufgabe 1

(a) Wir wollen zeigen, dass $N = \mathrm{Im}(s) \cup \{0\}$ ist. Per Definition ist $0 \in N$, und da $s : N \to N$ nach N abbildet, ist $\mathrm{Im}(s) \subseteq N$. Somit ist $N \supseteq \mathrm{Im}(s) \cup \{0\}$.

Nun folgt die umgekehrte Inklusion aber aus dem dritten Peano-Axiom: Für $A = \mathrm{Im}(s) \cup \{0\}$ gilt dann $0 \in A$ und, da $\mathrm{Im}(s) \subseteq A$, ist für alle $n \in A$ auch $s(n) \in A$. Somit muss $A = N$ sein.

(b) Angenommen, es gibt ein $n \in N$ mit $s(n) = n$. Da mit dem zweiten Peano-Axiom $0 \notin \mathrm{Im}(s)$ ist, muss $n \neq 0$ sein. Wir betrachten nun die Menge $A = N \setminus \{n\}$: Dann ist $0 \in A$, und für jedes $m \in A$ gilt: Da nach dem ersten Peano-Axiom s injektiv ist, ist $s(m) \neq s(n) = n$, da $m \neq n$ ist. Somit ist $s(m) \in A$. Insgesamt erfüllt A also die Bedingungen des dritten Peano-Axioms, und es folgt $A = N \setminus \{n\} = N$. Das ist ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch und es gilt für jedes $n \in N$, dass $s(n) \neq n$ ist.

Aufgabe 2

(a) Mit $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$, $y = \mathrm{const}_1$ und $g(f, n, k) = \mathrm{mult}(f(n,k), n)$ gibt es mit Satz 7.8 eine eindeutige Funktion $\mathrm{pow} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, sodass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{pow}(n, 0) = 1 \text{ und } \mathrm{pow}(n, s(k)) = \mathrm{mult}\big(\mathrm{pow}(n,k), n\big),$$

dabei bezeichnet "mult" die Multiplikationsfunktion aus Korollar 7.11 im Skript. (In geläufigerer Notation heißt das: $n^0 = 1$ und $n^{k+1} = n^k \cdot n$. So werden wir das natürlich auch in Zukunft wieder notieren.)

(b) Mit $X = \{*\}$, $Y = \mathbb{N}$, $y(*) = 1$ und $g(f, *, n) = \mathrm{mult}\big(f(*, n), s(n)\big)$ gibt es mit Satz 7.8 eine eindeutige Funktion $\mathrm{fak} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{fak}(0) = 1 \text{ und } \mathrm{fak}(s(n)) = \mathrm{mult}\big(\mathrm{fak}(n), s(n)\big).$$

(In geläufiger Notation: $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.)

Dabei haben wir implizit $\{*\} \times \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}$ identifiziert: Ausführlicher erhalten wir zunächst eine Funktion $\mathrm{fak}' : \{*\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{fak}'(*, 0) = 1 \text{ und } \mathrm{fak}'(*, s(n)) = \mathrm{mult}\big(\mathrm{fak}'(*, n), s(n)\big),$$

und definieren dann $\mathrm{fak}(n) := \mathrm{fak}'(*, n)$.

(c) Mit $X = \{*\}$, $Y = \mathbb{N}$, $y(*) = 0$ und

$$\begin{aligned} g : F(\{*\} \times \mathbb{N}, \mathbb{N}) \times \{*\} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (f, *, n) &\longmapsto \begin{cases} 1 & n = 0 \\ f(*, n) + f(*, n^-) & n = s(n^-) \text{ für ein } n^- \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

gibt es mit Satz 7.8 eine eindeutige Funktion $\mathrm{F} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$F(0) = 0, F(1) = 1 \text{ und } F(s(s(n))) = F(s(n)) + F(n)$$

(Anders notiert: $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.) Dabei benutzen wir bei der Definition von g Aufgabe 1(a): Diese sagt genau dass jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder 0 ist, oder $s(n^-)$ für ein $n^- \in \mathbb{N}$: Es ist natürlich $n^- = n - 1$. Somit ist die Fallunterscheidung so wohldefiniert. Außerdem haben wir, wie in (b), wieder $\{*\} \times \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}$ identifiziert.

Aufgabe 3

Mit den Definitionen von Addition und Multiplikation aus Korollar 7.11, sowie den Symbolen $1, \ldots, 9$ aus Definition 7.6, sowie mit Beispiel 7.12(3) (wo berechnet wurde, dass $3 + 3 = 6$ ist), ist folgendes ein möglicher Beweis

(Rechts ist in konventioneller Notation ergänzt, was in der entsprechenden Zeile steht):

$$
\begin{aligned}
3\cdot 3 &= \mathrm{mult}(3,3) && 3\cdot 3\\
&= \mathrm{mult}(3,s(2)) && = 3\cdot(2+1)\\
&= \mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(3,2),3\big) && = (3\cdot 2)+3\\
&= \mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(3,s(1)),3\big) && = (3\cdot(1+1))+3\\
&= \mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(3,1),3\big),3\Big) && = ((3\cdot 1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(3,s(0)),3\big),3\Big) && = ((3\cdot(0+1))+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(\mathrm{mult}(3,0),3\big),3\Big),3\Bigg) && = (((3\cdot 0)+3)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(0,3\big),3\Big),3\Bigg) && = ((0+3)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(0,s(2)\big),3\Big),3\Bigg) && = ((0+(2+1))+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(s\big(\mathrm{add}(0,2)\big),3\Big),3\Bigg) && = (((0+2)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(s\big(\mathrm{add}(0,s(1))\big),3\Big),3\Bigg) && = (((0+(1+1))+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(s\big(s\big(\mathrm{add}(0,1)\big)\big),3\Big),3\Bigg) && = ((((0+1)+1)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(s\big(s\big(\mathrm{add}(0,s(0))\big)\big),3\Big),3\Bigg) && = ((((0+(0+1))+1)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Bigg(\mathrm{add}\Big(s\big(s\big(s\big(\mathrm{add}(0,0)\big)\big)\big),3\Big),3\Bigg) && = (((((0+0)+1)+1)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(s(s(s(0))),3\big),3\Big) && = ((((0+1)+1)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(s(s(1)),3\big),3\Big) && = (((1+1)+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\Big(\mathrm{add}\big(s(2),3\big),3\Big) && = ((2+1)+3)+3\\
&= \mathrm{add}\big(\mathrm{add}(3,3),3\big) && = (3+3)+3\\
&= \mathrm{add}(6,3) && = 6+3\\
&= \mathrm{add}\big(6,s(2)\big) && = 6+(2+1)\\
&= s\big(\mathrm{add}(6,2)\big) && = (6+2)+1\\
&= s\big(\mathrm{add}(6,s(1))\big) && = (6+(1+1))+1\\
&= s\big(s\big(\mathrm{add}(6,1)\big)\big) && = ((6+1)+1)+1\\
&= s\big(s\big(\mathrm{add}(6,s(0))\big)\big) && = ((6+(0+1))+1)+1\\
&= s\big(s\big(s\big(\mathrm{add}(6,0)\big)\big)\big) && = (((6+0)+1)+1)+1\\
&= s(s(s(6))) = s(s(7)) = s(8) = 9 && = ((6+1)+1)+1 = (7+1)+1 = 8+1 = 9.
\end{aligned}
$$

Es lassen sich nun wahlweise zwei Gesichter oder eine (selbstgetöpferte) Vase erkennen.

Aufgabe 4

(a) Die Aufgabe ist falsch: Damit die zu zeigenden Aussagen stimmt, muss M nichtleer sein. Eine vollständige Lösung wäre also: "(a): Gegenbeispiel $M=\emptyset$". Das ist aber natürlich wenig lehrreich, daher nehmen wir nun an, dass M nichtleer ist:

Da M nichtleer ist, können wir ein $m\in M$ wählen. Wir nehmen an, M habe kein minimales Element. Dann konstruieren wir eine Funktion $f:\mathbb{N}\to M$ mithilfe des Rekursionsprinzips: Wir setzen $f(0)=m$. Für ein $n\in$

$\mathbb{N}$ ist nun $f(n)$ nicht minimal, also existieren kleinere Elemente. Wir wählen ein solches als Wert für $f(n+1)$. Also ist $f(n+1) < f(n)$. Dann ist insbesondere für $n' > n$ auch $f(n') < f(n)$: Das gilt, ganz ausführlich, durch folgende Induktion: Wir können n' schreiben als $n' = n+1+k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist für $k=0$ nach Konstruktion $f(n+1) < f(n)$, und falls $f(n+1+k) < f(n)$ ist, so ist

$$f(n+1+s(k)) = f((n+1+k)+1) < f(n+1+k) < f(n).$$

Somit ist $f : \mathbb{N} \to M$ eine injektive Funktion: Falls $n \neq n'$, so ist $n < n'$ oder $n' > n$, und somit $f(n) > f(n')$ oder $f(n) < f(n')$, in jedem Fall also $f(n) \neq f(n')$. Dann ist nach Satz 7.9 die Menge M unendlich. Im Umkehrschluss folgt also: Falls M endlich ist, so muss es ein kleinstes Element geben. (Wir haben sogar gezeigt: Falls M endlich ist, muss es für jedes $m \in M$ ein minimales Element k geben, sodass $k \leq m$.)

Alternativ ist auch ein induktiver Beweis möglich: Wenn M endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $M \to \{1,\ldots,n\}$. Wenn M nichtleer ist, ist $n \geq 1$: Falls nun $n = 1$ ist, hat $M = \{m\}$ sicherlich ein minimales Element, nämlich m. Sei nun angenommen, für ein $n \geq 1$ hat jede n-elementige Menge ein minimales Element, $f : M \to \{1,\ldots,n+1\}$ eine Bijektion und $x := f^{-1}(n+1)$. Dann hat $M \setminus \{x\}$ n Elemente, also insbesondere ein minimales Element m. Nun vergleichen wir x und m: Da $m \in M\setminus\{x\}$ ist, ist $m \neq x$, es können also drei Fälle eintreten:

- Wenn weder $x \leq m$ noch $m \leq x$ ist, so ist m immer noch minimal.
- Wenn $m \leq x$ ist, so ist m auch immer noch minimal.
- Wenn $x \leq m$ ist, so ist x minimal: Für jedes $y \in M$ mit $y \leq x$ folgt mit Transitivität $y \leq m$. Da m minimal in $M\setminus\{x\}$ ist, ist nun entweder $y = x$ oder $y = m$. Aber letzteres würde mit Identitivität $x = m$ implizieren, was ein Widerspruch ist, also folgt $y = x$.

(b) Auch hier muss der Fall $M = \emptyset$ betrachtet werden. In diesem Fall ist $|M| = 0$, und die Menge $\{1,\ldots,0\}$ kann am sinnvollsten als die leere Menge interpretiert (und daher als solche definiert) werden. Mit dieser Konvention stimmt (b) auch für $M = \emptyset$: Es gibt nur eine Bijektion

$$f : \{1,\ldots,0\} = \emptyset \to \emptyset,$$

und für diese gilt $k \leq k' \Rightarrow f(k) \leq f(k')$ für alle $k, k' \in \emptyset$—das ist eine leere Bedingung.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und M total geordnet mit $m = |M|$. Wir zeigen, dass es eine eindeutige Bijektion

$$f : \{1,\ldots,m\} \longrightarrow M$$

gibt, sodass $k \leq k' \Rightarrow f(k) \leq f(k')$. Für $m = 0$ haben wir das eben getan. Angenommen, die Aussage stimmt für ein $m \in \mathbb{N}$, dann wollen wir sie für $m+1$ zeigen:

Sei $|M| = m+1$. Wir bemerken zunächst, dass derselbe Beweis wie in (a) auch zeigt, dass M ein *maximales* Element x hat (alternativ folgt das auch direkt aus (a), indem wir die umgekehrte Ordnungsrelation $\leq^{\text{rev}}$ betrachten). Da $m+1 \geq k$ für alle k, muss auch für unsere Bijektion f für alle k $f(m+1) \geq f(k)$sein, also muss $f(m+1)$ maximal sein. Da M total geordnet ist, ist x auch das *größte* Element von M, also muss $f(m+1) = x$ sein.

Die Menge $M\setminus\{x\}$ mit der von M eingeschränkten Ordnungsrelation ist immer noch total geordnet, und hat nun m Elemente. Nach Annahme gibt es also eine eindeutige ordnungserhaltende Bijektion $f' : \{1,\ldots,m\} \to M\setminus\{x\}$. Wir definieren also

$$\begin{aligned} f : \{1,\ldots,m,m+1\} &\longrightarrow M \\ k &\longmapsto \begin{cases} f'(k) & k \leq m \\ x & k = m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f eine Bijektion, da f' eine Bijektion ist, und wir auf beiden Seiten je ein Element hinzugefügt haben, und f das eine auf das andere sendet. Zusätzlich ist f ordnungserhaltend, da f' ordnungserhaltend ist, und das neue größte Element $m+1$ auf das neue größte Element x geschickt wird. Und f ist die einzige solche Funktion: Wir hatten bereits erkannt, dass $f(m+1) = x$ sein muss, und nach Annahme ist f' auf dem Rest eindeutig gegeben.

Aufgabe 5

Konstruiere für jedes der drei Peano-Axiome eine Menge N, ein Element $\alpha \in N$ sowie eine Funktion $s : N \to N$ sodass das entsprechende Axiom *nicht* erfüllt ist, aber die anderen beiden Axiome erfüllt sind.

(1) Für das Axiom *(1): s ist injektiv* betrachten wir folgendes Beispiel: $N = \{0,1\}$, $\alpha = 0$, $s(0) = 1$ und $s(1) = 1$. Dann ist $\alpha \notin \mathrm{Im}(s)$. Für eine Menge $A \subseteq N$, für die gilt, dass

$$\alpha \in A \wedge \big(n \in A \Rightarrow s(n) \in A\big),$$

ist also $0 \in A$ und $s(0) = 1 \in A$, somit ist $A = N$.

Die Injektivität von s stellt also sicher, dass zwei verschiedene Zahlen nicht denselben Nachfolger haben können.

(2) Für das Axiom *(2):* $\alpha \notin \mathrm{Im}(s)$ funktioniert ein noch simpleres Beispiel: $N = \{0\}$, $\alpha = 0$, $s(0) = 0$. Dann ist s injektiv (sogar bijektiv), und für eine Menge $A \subseteq N$ mit $\alpha \in A$ gilt direkt, dass $A = N$ ist.

Das zweite Axiom stellt also sicher, dass wir beim Weiterzählen nicht wieder bei 0 landen. Insbesondere garantieren (1) und (2) gemeinsam, dass N unendlich ist: Mit ihnen ist $s : N \to N$ injektiv, aber nicht surjektiv.

(3) Für das Axiom

$$\textit{(3):}\ \forall A \subseteq N : \Big(\alpha \in A \wedge \big(n \in A \Rightarrow s(n) \in A\big)\Big) \Rightarrow A = N$$

betrachten wir folgendes Beispiel: Wir wählen ein ein System natürlicher Zahlen (N, α, s) und definieren definieren neu $N' = N \cup \{\infty\}$, $\alpha' = \alpha$ und

$$\begin{aligned} s' : N' &\longrightarrow N' \\ n &\longmapsto \begin{cases} s(n) & n \in N \\ \infty & n = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Dann erfüllt (N', α', s') Axiom (1), da s injektiv war und $s'(\infty) = \infty$ das nicht verändert, und Axiom (2), da $\alpha' = \alpha$ nicht im Bild von s liegt, und $\mathrm{Im}(s') = \mathrm{Im}(s) \cup \{\infty\}$. Aber es erfüllt nicht Axiom (3), da für $N \subset N'$ gilt, dass

$$\alpha \in N \wedge \big(n \in N \Rightarrow s(n) \in N\big),$$

aber $N \neq N'$.

Das dritte Axiom stellt also sicher, dass jede Zahl durch Zählen von 0 aus erreicht werden kann.