Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(M,*,e)$ ein Monoid.

(a) Sei zusätzlich $(M',*',e')$ ein Monoid. Für die Menge $M \times M'$ definieren wir die Verknüpfung $\circledast$ wie folgt: Für $m,n \in M$, $m',n' \in M'$ ist

$$(m,m') \circledast (n,n') \coloneqq (m*n, m' *' n').$$

Zeige: $\big(M \times M', \circledast, (e,e')\big)$ ist ein Monoid.

(b) Für eine Menge S definieren wir auf der Menge $F(S,M)$ der Abbildungen von S nach M die Verknüpfung $\star$ wie folgt: Für $f,g \in F(S,M)$ und $s \in S$ ist

$$(f *_S g)(s) \coloneqq f(s) * g(s).$$

Zeige: $\big(F(S,M), *_S, \mathrm{const}_e\big)$ ist ein Monoid.

Bemerkung. Wenn $S = \{1,2\}$ eine Menge mit zwei Elementen ist, dann sind die beiden Monoide isomorph:

$$\big(F(S,M), *_S, \mathrm{const}_e\big) \cong \big(M \times M, \circledast, (e,e)\big)$$

(Wer möchte, kann gerne versuchen, das zu zeigen!)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bearbeite zwei der folgenden vier Teilaufgaben mithilfe des Induktionsprinzips:

(a) Sei $(K,+,0)$ ein kommutativer Monoid, $n \in \mathbb{N}$, $f : \{0,\dots,n\} \to K$ eine Funktion und $\sigma : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,n\}$ eine Bijektion. Zeige:

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} f(\sigma(i))$$

(b) Seien $m,n \in \mathbb{N}$, $(M,\cdot,1)$ ein Monoid und $f : \{0,\dots,m\} \to M$ und $g : \{0,\dots,n\} \to M$ Funktionen. Zeige:

$$\left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{j=0}^{n} g(j)\right) = \prod_{k=0}^{m+n+1} h(k),$$

wobei h definiert ist als

$$h : \{0,\cdots,m+n+1\} \to M, k \mapsto \begin{cases} f(k) & k \le m \\ g(k-m) & k > m. \end{cases}$$

(c) Sei $(K,\cdot,1)$ ein kommutativer Monoid, $n \in \mathbb{N}$ und $f,g : \{0,\dots,n\} \to K$ Funktionen. Zeige:

$$\left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right) = \prod_{i=0}^{n} f(i) \cdot g(i).$$

(d) Sei $(R,+,\cdot,0,1)$ ein Halbring, $r \in R$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : \{0,\dots,n\} \to R$ eine Funktion. Zeige:

$$r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} f(i)\right) = \sum_{i=0}^{n} r \cdot f(i).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Schreibe die Zahl 512 in den Basen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir definieren auf $F(\mathbb{N}, P)$ eine Relation $\trianglelefteq$ wie folgt: Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to P$ sei $f \trianglelefteq g$ genau dann, wenn $f = g$ oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$f(n) < g(n) \text{ und } \forall n' > n : f(n') = g(n').$$

Zeige: Diese Relation ist eine partielle Ordnung.

Bemerkung. Diese Ordnung wird *lexikographische Ordnung* genannt. Statt $\mathbb{N}$ kann auch eine beliebige total geordnete Menge $(\mathcal{N}, \preccurlyeq)$ verwendet werden, Definition und Beweis sind dann komplett analog.

(b) Sei $b \geq 2$ und

$$\alpha_b : \mathbb{N} \longrightarrow F\big(\mathbb{N}, \{0, \ldots, b-1\}\big)$$

die Funktion, die jeder natürlichen Zahl ihre Stellenzerlegung zur Basis b aus Satz 8.2 zuordnet.

Zeige: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist $m \leq n$ genau dann, wenn $\alpha_b(m) \trianglelefteq \alpha_b(n)$. (Hierbei trägt $\{0, \ldots, b-1\} \subseteq \mathbb{N}$ die von $(\mathbb{N}, \leq)$ eingeschränkte Ordnung.)

Bemerkung. In weniger pompöser Sprache sagt 4(b) folgendes: Wir können die Größe von zwei natürliche Zahlen m und n vergleichen, indem wir sie in einer Basis b notieren, und dann die größte Stelle finden, in der sich die Stellendarstellungen von m und n unterscheiden. Wenn diese Stelle für n größer ist als für m, so ist auch n größer als m. Diese Tatsache ist für $b = 10$ schon intuitiv bekannt: Wenn ich die zehnstelligen Zahlen 6373010471 und 6340672542 vergleiche, sehe ich direkt, dass die erste größer ist: Die größte unterschiedliche Stelle ist dort mit 7 größer ist als bei der zweiten mit 4. Wenn ich die zehnstellige Zahl 6373010471 mit der neunstelligen Zahl 603734598 vergleiche, weiß ich auch direkt, dass die zehnstellige Zahl größer ist: Hier ist die größte unterschiedliche Stelle die zehnte (von rechts)—sie ist bei der ersten Zahl 6, und bei der zweiten Zahl 0 (und in der Notation unterschlagen).