Aufgabe 1

(a) Wir müssen die Assoziativität von $\circledast$ sowie die Neutralität von (e, e') zeigen.

Für die Assoziativität seien $m, n, o \in M$ und $m', n', o' \in M'$. Dann ist

$$\begin{aligned}\big((m, m') \circledast (n, n')\big) \circledast (o, o') &= (m * n, m' *' n') \circledast (o, o')\\ &= \big((m * n) * o, (m' *' n') *' o'\big)\\ &= \big(m * (n * o), m' *' (n' *' o')\big)\\ &= (m, m') \circledast (n * o, n' *' o') = (m, m') \circledast \big((n, n') \circledast (o, o')\big).\end{aligned}$$

Für die Neutralität sei $m \in M$ und $m' \in M'$. Dann ist

$$(e, e') \circledast (m, m') = (e * m, e' *' m') = (m, m') = (m * e, m' *' e') = (m, m') \circledast (e, e').$$

(b) Wieder sind Assoziativität und Neutralität zu zeigen.

Für die Assoziativität seien $f, g, h \in F(S, M)$. Dann ist für jedes $s \in S$

$$\begin{aligned}\big((f *_S g) *_S h\big)(s) &= (f *_S g)(s) * h(s) = \big(f(s) * g(s)\big) * h(s)\\ &= f(s) * \big(g(s) * h(s)\big) = f(s) * (g *_S h)(s) = \big(f *_S (g *_S h)\big)(s).\end{aligned}$$

Da auf dem gesamten Definitionsbereich $(f *_S g) *_S h$ und $f *_S (g *_S h)$ übereinstimmen, sind die Funktionen gleich.

Für die Neutralität sei $f \in F(S, M)$. Dann ist für jedes $s \in S$

$$\begin{aligned}(\mathrm{const}_e *_S f)(s) &= \mathrm{const}_e(s) * f(s) = e * f(s) = f(s)\\ &= f(s) * e = f(s) * \mathrm{const}_e(s) = (f * \mathrm{const}_e)(s).\end{aligned}$$

Da auf dem gesamten Definitionsbereich $\mathrm{const}_e *_S f$, f und $f *_S \mathrm{const}_e$ übereinstimmen, sind die drei Funktionen gleich.

Bemerkung. Wenn $S = \{1, 2\}$ eine Menge mit zwei Elementen ist, dann können wir folgende zueinander inversen Monoidisomorphismen konstruieren:

$$\begin{aligned}\varphi : \big(F(S, M), *_S, \mathrm{const}_e\big) &\longrightarrow \big(M \times M, \circledast, (e, e)\big) : \psi\\ f &\longmapsto (f(1), f(2))\\ (1 \mapsto m, 2 \mapsto n) &\longleftarrow\!\shortmid (m, n).\end{aligned}$$

Die Überprüfung, dass beides Homomorphismen und diese zueinander invers sind, bleibt motivierten Leser:innen selbst überlassen.

Aufgabe 2

(a) Diese Teilaufgabe (zumindest unserer Beweis) benutzt Teilaufgabe (b) und ist somit falsch einsortiert. Tschuldigung!

Der Beweis ist eine Induktion über n: Falls $n = 0$, so ist $\sigma : \{0\} \to \{0\}$ notwendigerweise die Identität, und somit

$$\sum_{i=0}^{0} f(i) = f(0) = f(\sigma(0)) = \sum_{i=0}^{0} f(\sigma(i)).$$

Sei nun angenommen, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, und sei $\sigma : \{0, \ldots, n+1\} \to \{0, \ldots, n+1\}$ eine Bijektion sowie $f : \{0, \ldots, n+1\} \to K$ eine Funktion.

Wir definieren Funktionen $\widetilde{f}$ und $\widetilde{\sigma}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\widetilde{f} : \{0, \ldots, n\} &\longrightarrow K\\ i &\longmapsto \begin{cases} f(i) & i < \sigma(n+1)\\ f(i+1) & i \geq \sigma(n+1)\end{cases}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\widetilde{\sigma} : \{0, \ldots, n\} &\longrightarrow \{0, \ldots, n\}\\ i &\longmapsto \begin{cases} \sigma(i) & \sigma(i) < \sigma(n+1)\\ \sigma(i) - 1 & \sigma(i) > \sigma(n+1).\end{cases}\end{aligned}$$

Dann ist $\widetilde{f}(\widetilde{\sigma}(i)) = f(\sigma(i))$ für $0 \le i \le n$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} f(i) &= \left(\sum_{i=0}^{\sigma(n+1)-1} f(i)\right) + f(\sigma(n+1)) + \left(\sum_{\sigma(n+1)+1}^{n+1} f(i)\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\sigma(n+1)-1} f(i)\right) + \left(\sum_{\sigma(n+1)+1}^{n+1} f(i)\right) + f(\sigma(n+1)) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\sigma(n+1)-1} \widetilde{f}(i)\right) + \left(\sum_{\sigma(n+1)}^{n} \widetilde{f}(i)\right) + f(\sigma(n+1)) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \widetilde{f}(i)\right) + f(\sigma(n+1)) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \widetilde{f}(\widetilde{\sigma}(i))\right) + f(\sigma(n+1)) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} f(\sigma(i))\right) + f(\sigma(n+1)) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} f(\sigma(i)).
\end{aligned}$$

Dabei benutzen der erste und vierte Schritt Teilaufgabe (b), der zweite die Kommutativität von K und der fünfte die Induktionsannahme.

(b) In dieser Aufgabe befand sich ein Tippfehler in der Definition von h: richtig wäre

$$h : \{0, \cdots, m+n+1\} \to M, k \mapsto \begin{cases} f(k) & k \le m \\ g(k-(m+1)) & k > m, \end{cases}$$

es fehlte das $+1$ am Ende. Tschuldigung!

Wir zeigen induktiv, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt: Für $n = 0$ ist $\prod_{j=0}^{n} g(j) = g(0)$, und wir haben

$$\left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{j=0}^{0} g(j)\right) = \left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot g(0) = \left(\prod_{i=0}^{m} h(i)\right) \cdot h(m+1) = \prod_{k=0}^{m+1} h(k),$$

wobei der letzte Schritt aus der rekursiven Definition von $\prod$ folgt.

Sei nun angenommen, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{j=0}^{n+1} g(j)\right) &= \left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot \left(\left(\prod_{j=0}^{n} g(j)\right) \cdot g(n+1)\right) \\
&= \left(\left(\prod_{i=0}^{m} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{j=0}^{n} g(j)\right)\right) \cdot g(n+1) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{m+n+1} h'(i)\right) \cdot g(n+1) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{m+n+1} h(i)\right) \cdot h(n+1) \\
&= \prod_{i=0}^{m+(n+1)+1} h(i),
\end{aligned}$$

wobei h' die Einschränkung von $h : \{0, \ldots, n+m+2\} \to M$ auf die Menge $\{0, \ldots, n+m+1\}$ ist.

(c) Sei zunächst $n = 0$, dann ist

$$\left(\prod_{i=0}^{0} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{0} g(i)\right) = f(0) \cdot g(0) = \prod_{i=0}^{0} f(i) \cdot g(i).$$

Sei nun angenommen, die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$: Dann ist

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=0}^{n+1} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{n+1} g(i)\right) &= \left(\left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot f(n+1)\right) \cdot \left(\left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right) \cdot g(n+1)\right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(f(n+1) \cdot \left(\left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right) \cdot g(n+1)\right)\right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(\left(f(n+1) \cdot \left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right)\right) \cdot g(n+1)\right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(\left(\left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right) \cdot f(n+1)\right) \cdot g(n+1)\right) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(\left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right) \cdot \big(f(n+1) \cdot g(n+1)\big)\right) \\
&= \left(\left(\prod_{i=0}^{n} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{i=0}^{n} g(i)\right)\right) \cdot \big(f(n+1) \cdot g(n+1)\big) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{n} f(i) \cdot g(i)\right) \cdot \big(f(n+1) \cdot g(n+1)\big) \\
&= \prod_{i=0}^{n+1} f(i) \cdot g(i).
\end{aligned}$$

Dabei verwenden der erste und letzte Schritt die Definition von $\prod$, der vorletzte Schritt die Induktionsannahme, der vierte Schritt die Kommutativität und alle anderen die Assoziativität von K.

(d) Auch dies folgt induktiv: Falls $n = 0$ ist, so ist

$$r \cdot \left(\sum_{i=0}^{0} f(i)\right) = r \cdot f(0) = \sum_{i=0}^{0} r \cdot f(i).$$

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} f(i)\right) &= r \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^{n} f(i)\right) + f(n+1)\right) \\
&= r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} f(i)\right) + r \cdot f(n+1) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} r \cdot f(i)\right) + r \cdot f(n+1) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n+1} r \cdot f(i)\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(2) $512 = 1 \cdot 2^9$, also ist $512 = (1000000000)_2$.

(3) $512 = 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$, also ist $512 = (200222)_3$.

(4) $512 = 2 \cdot 4^4$, also ist $512 = (20000)_4$.

(5) $512 = 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$, also ist $512 = (4022)_5$.

(6) $512 = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$, also ist $512 = (2211)_6$.

(7) $512 = 1 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0$, also ist $512 = (1331)_7$.

(8) $512 = 1 \cdot 8^3$, also ist $512 = (1000)_8$.

(9) $512 = 6 \cdot 9^2 + 2 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0$, also ist $512 = (628)_9$.

Aufgabe 4

(a) Wir müssen zeigen, dass $\trianglelefteq$ reflexiv, transitiv und identitiv ist:

- **Reflexiv:** Sei $f : \mathbb{N} \to P$ eine Funktion. Dann ist $f = f$, also nach Definition $f \trianglelefteq f$.
- **Transitiv:** Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to P$ Funktionen mit $f \trianglelefteq g$ und $g \trianglelefteq h$. Dann wollen wir zeigen, dass $f \trianglelefteq h$ ist: Falls $f = g$ oder $g = h$ ist, folgt dies automatisch. Daher nehmen wir nun an, dass $f \neq g$ und $g \neq h$ sind: Dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f(n) < g(n) \text{ und } \forall n' > n : f(n') = g(n'),$$

$$g(m) < h(m) \text{ und } \forall m' > m : g(m') = h(m').$$

  Wir vergleichen nun m und n: Falls $m = n$, so ist

$$f(n) < g(n) < h(n) \text{ und } \forall n' > n : f(n') = g(n') = h(n'),$$

  falls $m < n$ ist, so gilt

$$f(n) < g(n) = h(n) \text{ und } \forall n' > n : f(n') = g(n') = h(n'),$$

  und falls $m > n$ ist, so gilt

$$f(m) = g(m) < h(m) \text{ und } \forall m' > m : f(m') = g(m') = h(m').$$

  In allen Fällen gibt es also ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$f(k) < h(k) \text{ und } \forall k' > k : f(k') = h(k'),$$

  und somit ist $f \trianglelefteq h$.
- **Identitiv:** Seien nun $f, g : \mathbb{N} \to P$ mit $f \trianglelefteq g$ und $g \trianglelefteq f$. Wir wollen zeigen, dass $f = g$ ist: Angenommen, $f \neq g$, dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit

$$f(n) < g(n) \text{ und } \forall n' > n : f(n') = g(n'),$$

$$g(m) < f(m) \text{ und } \forall m' > m : f(m') = g(m').$$

  Wir vergleichen wieder n und m: Falls $m = n$ ist, muss $f(n) < g(n) < f(n)$ sein, was ein Widerspruch ist. Falls $m < n$ ist, muss $f(n) < g(n) = f(n)$ sein, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Genauso führt $m > n$ mit $g(m) < f(m) = g(m)$ zum Widerspruch, also muss die Annahme falsch und $f = g$ sein.

Bemerkung. Selbst wenn P total geordnet ist, ist $\trianglelefteq$ im Allgemeinen keine totale Ordnung: Sobald es zwei verschiedene Elemente $p < q \in P$ gibt, so können wir bspw. $f, g : \mathbb{N} \to P$ definieren als $f(2n) = g(2n+1) = p$ und $f(2n+1) = g(2n) = q$ für jedes $n \in \mathbb{N}$: Dann ist $f \neq g$, und weder $f \trianglelefteq g$ noch $g \trianglelefteq f$, da abwechselnd f und g größer sind. Um alle Elemente vergleichbar zu machen, müssen wir uns auf Funktionen einschränken, die fast alle $n \in \mathbb{N}$ auf ein fixiertes Element $0 \in P$ schicken–wie zum Beispiel die Stellenzerlegung aus (b)!

(b) Wir machen zunächst die obige Bemerkung präzise: Sei $\mathcal{N} \subseteq F\big(\mathbb{N}, \{0, \ldots, b-1\}\big)$ die Teilmenge aller Funktionen $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, b-1\}$, für die $\alpha(i) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $\alpha_b(n) \in \mathcal{N}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und $\trianglelefteq$ ist auf $\mathcal{N}$ eine totale Ordnung: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{i \in \mathbb{N} : \alpha_b(n)(i) \neq 0\}$ endlich, also ist auch für $m, n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{i \in \mathbb{N} : \alpha_b(m)(i) \neq \alpha_b(n)(i)\}$ endlich, und falls $m \neq n$ ist, ist sie nichtleer: Insbesondere hat sie dann ein Maximum k. Dann ist entweder $\alpha_b(m)(k) < \alpha_b(n)(k)$ oder umgekehrt, und somit $\alpha_b(m) \trianglelefteq \alpha_b(n)$ oder $\alpha_b(m) \trianglerighteq \alpha_b(n)$.

Nun erinnern wir uns an die Tatsache, dass für eine monotone Funktion $f : S \to T$ zwischen total geordneten Mengen, für die $f(s) \leq f(s') \Rightarrow s \leq s'$ gilt, bereits folgt, dass f monoton ist. (Monotonie von f ist die umgekehrte Implikation: Sei $s \leq s'$. Da T total geordnet ist, muss $f(s) \leq f(s')$ oder $f(s) \geq f(s')$ gelten. Letzteres würde aber $s \geq s'$ implizieren, also wäre $s = s'$ und $f(s) = f(s')$. In beiden Fällen ist also $f(s) \leq f(s')$.) Insbesondere reicht es also, wenn wir zeigen, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ folgende Implikation gilt:

$$\alpha_b(m) \trianglelefteq \alpha_b(n) \Rightarrow m < n.$$

Sei also $\alpha_b(m) \trianglelefteq \alpha_b(n)$. Für die Lesbarkeit schreiben wir

$$m_i \coloneqq \alpha_b(m)(i) \text{ und } n_i \coloneqq \alpha_b(n)(i).$$

Dann ist entweder $\alpha_b(m) = \alpha_b(n)$, und somit

$$m = \sum_i m_i b^i = \sum_i n_i b^i = n,$$

oder es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $m_k < n_k$ und für $k' > k$ gilt, dass $m'_k = n'_k$.

Wir erinnern uns nun an die geometrische Summenformel (Satz 8.3): Diese besagt insbesondere, dass für $k \geq 1$ gilt: $b^k = \sum_{i=0}^{k-1} (b-1) \cdot b^i + 1$. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} m_i b^i &= \sum_{i=0}^{k-1} m_i b^i + m_k b^k \leq \sum_{i=0}^{k-1} (b-1) b^i + m_k b^k \\ &< b^k + m_k b^k \leq n_k b^k \leq \sum_{i=0}^{k-1} n_i b^i + n_k b^k = \sum_{i=0}^{k} n_i b^i.\end{aligned}$$

und somit auch

$$m = \sum_{i \geq 0} m_i b^i = \sum_{i=0}^{k} m_i b^i + \sum_{i>k} m_i b^i < \sum_{i=0}^{k} n_i b^i + \sum_{i>k} m_i b^i = \sum_{i=0}^{k} n_i b^i + \sum_{i>k} n_i b^i = \sum_{i \geq 0} n_i b^i = n.$$