## Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeige: Die Menge $\mathcal{P}$ aller Primzahlen ist unendlich. (Hinweis: Angenommen, $\mathcal{P}$ ist endlich, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Betrachte dann die Zahl $\left(\prod_{i=1}^n p_i\right) + 1$.)

## Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $(M, *, e)$ ein Monoid.

(a) Zeige: Falls $u \in M$ eine Einheit ist, so ist auch $u^{-1}$ eine Einheit.

(b) Sei $f : M \to N$ ein Homomorphismus von Monoiden. Zeige: Falls $u \in M$ eine Einheit ist, so ist auch $f(u) \in N$ eine Einheit.

(c) Zeige: Falls $u, v \in M$ Einheiten sind, so ist auch $u * v$ eine Einheit.

(d) Sei nun $(R, +, \times, 0, 1)$ ein Halbring. Zeige: $R$ ist ein Ring genau dann, wenn 1 eine Einheit bezüglich $+$ ist.

## Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $(M, *, e)$ ein Monoid. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M$ heißt *Kongruenzrelation*, falls für alle $m, m', n, n' \in M$ gilt:

$$m \sim m', n \sim n' \Rightarrow m * n \sim m' * n'.$$

(a) Zeige: Wenn $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $M$ ist, so gibt es genau eine Abbildung $\tilde{*}: M/{\sim} \times M/{\sim} \to M/{\sim}$ mit $[m]\tilde{*}[n] = [m * n]$ für alle $m, n \in M$ und $(M/{\sim}, \tilde{*}, [e])$ ein Monoid.

(b) Bearbeite zwei der folgenden Teilaufgaben:

($b_1$) Sei $(R, +, \times, 0, 1)$ ein Halbring und $W \subseteq R$ eine Teilmenge wie in Konstruktion 9.12. Zeige: Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $R \times W$ gegeben durch

$$(r, w) \sim (r', w') \Leftrightarrow r + w' = r' + w.$$

ist eine Kongruenzrelation bezüglich der Verknüpfung $\times: R \times W \times R \times W \to R \times W$, gegeben durch

$$(r, w) \times (s, v) := (rs + wv, rv + ws).$$

($b_2$) Sei $(R, +, \times, 0, 1)$ ein Halbring und $W \subseteq R$ eine Teilmenge wie in Konstruktion 10.7. Zeige: Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $R \times W$ mit

$$(r, w) \sim (r', w') \Leftrightarrow r \times w' = r' \times w,$$

ist eine Kongruenzrelation bezüglich der Verknüpfung $+: R \times W \times R \times W \to R \times W$, gegeben durch

$$(r, w) + (s, v) := (rv + ws, wv).$$

($b_3$) Zeige: Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ ist die Modulo-$b$-Äquivalenzrelation $\equiv_b$ auf $\mathbb{N}$ mit

$$m \equiv_b n \Leftrightarrow \mathrm{rem}_b(m) = \mathrm{rem}_b(n)$$

eine Kongruenzrelation bezüglich der Addition.

($b_4$) Zeige: Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ ist die Modulo-$b$-Äquivalenzrelation $\equiv_b$ auf $\mathbb{N}$ eine Kongruenzrelation bezüglich der Multiplikation.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(M, \star, e)$ ein Monoid und $m \in M$. Zeige:

(a) Es genau einen Monoidhomomorphismus $f: \mathbb{N} \to M$ mit $f(1) = m$, wobei wir $\mathbb{N}$ via der Addition als Monoid ansehen.

(b) Dieser Homomorphismus erweitert sich zu einem Homomorphismus $\mathbb{Z} \to M$ genau dann, wenn $m$ eine Einheit ist, und in diesem Fall ist so eine Erweiterung eindeutig bestimmt.