Da Donnerstag ein Feiertag ist, ist die Abgabe wieder bis Freitag (31.5.) um 14:00 möglich.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $(R,+,\cdot,0,1)$ ein Halbring.

(a) Zeige: Es gibt genau einen Halbringhomomorphismus $\mathbb{N} \to R$.

(b) Zeige: Falls R ein Ring ist, gibt es genau einen Halbringhomomorphimsus $\mathbb{Z} \to R$. Falls R kein Ring ist, gibt es keinen.

(c) Sei R nun ein Körper. Zeige: Es gibt höchstens einen Halbringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to R$. Gibt es immer einen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Finde alle Einheiten in dem Ring $\mathbb{Z}/8$ bezüglich der Multiplikation.

(b) Finde zu allen Einheiten des Körpers $\mathbb{Z}/13$ das jeweilige multiplikative Inverse.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $2 \leq n \leq m$ natürliche Zahlen. Zeige: Wenn n ein Teiler von m ist, hat die Gleichung

$$n \cdot x = 0$$

in dem Ring $\mathbb{Z}/m$ exakt n Lösungen.

Bonus (+4 Punkte): Zeige: Wenn n kein Teiler von m ist, hat $n \cdot x = 0$ weniger als n Lösungen in $\mathbb{Z}/m$. (Hinweis: Betrachte $k \in \mathbb{N}$ und $i > 0$, sodass $[k]$ und $[k+i]$ Lösungen in $\mathbb{Z}/m$ sind. Zeige, dass $i \geq \frac{m}{n}$, und benutze dies, um die Anzahl aller Repräsentanten k von Lösungen $[k]$ mit $0 < k \leq m$ abzuschätzen.)

Bemerkung. Um die genaue Anzahl der Lösungen zu bestimmen, bedarf es etwas Zahlentheorie.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,5,\mathbb{Z}).$$

(a) Was ist das zu Z und einem $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3$ assoziierte Gleichungssystem?

(b) Für welche b besitzt das Gleichungssystem mindestens eine Lösung?

(c) Sei nun b so, dass eine Lösung existiert. Beschreibe alle Lösungen $(x_1, \ldots, x_5) \in L(Z)^{-1}(b) \subseteq \mathbb{Z}^5$ wie in Beispiel II.1.6: Finde den Zeilenrang $l \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(5, 5-l, \mathbb{Z})$ und $B \in \mathrm{Mat}(5, l, \mathbb{Z})$, sodass

$$f_b(x) = \big(L(A)\big)(x) + \big(L(B)\big)(b)$$

eine injektive Funktion $f_b : \mathbb{Z}^{5-l} \to \mathbb{Z}^5$ definiert, deren Bild $L(Z)^{-1}(b)$ ist.