Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,7,\mathbb{Z}/5).$$

(a) Bringe die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus in strikte Zeilenstufenform.

(b) Für welche $b \in \mathbb{Z}/5^5$ besitzt das Gleichungssystem $\big(L(A)\big)(x) = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{Z}/5^7$?

(c) Sei $b = (0,1,2,2,3) \in \mathbb{Z}/5^5$. Finde alle Lösungen für $Ax = b$ wie folgt: Lies von der Zeilenstufenform aus (a) den Zeilenrang l ab, und benutze (a), um eine Bijektion von $\mathbb{Z}/5^{7-l}$ zur Lösungsmenge $L(A)^{-1}(b)$ zu konstruieren.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 9 & -5 \\ 4 & 0 & 15 & -8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Q})$$

und den Vektor $b = (0,4,2,6) \in \mathbb{Q}^4$. Bringe A mit dem Gauß-Algorithmus in strikte Zeilenstufenform und finde rationale Zahlen $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{Q}$, sodass $x = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{Q}^4$ ein Element der Lösungsmenge $L(A)^{-1}(b)$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei R ein Ring, $k, n \geq 1$ natürliche Zahlen, $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ und $b \in R^k$.

(a) Sei $\lambda \in R$ und $1 \leq a, c \leq k$. Zeige:

$$L(A)^{-1}(b) = L\left(s^{\lambda}_{a,c}(A)\right)^{-1}\left(s^{\lambda}_{a,c}(b)\right).$$

(b) Sei $\lambda \in R$ eine Einheit und $1 \leq a \leq k$. Zeige:

$$L(A)^{-1}(b) = L\left(m^{\lambda}_{a}(A)\right)^{-1}\left(m^{\lambda}_{a}(b)\right).$$

(c) Seien $1 \leq a, c \leq k$. Zeige:

$$L(A)^{-1}(b) = L\left(t_{a,c}(A)\right)^{-1}\left(t_{a,c}(b)\right).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeige, dass Beobachtung II.1.5 im Skript auch gilt, wenn Z nur in (nicht strikter) Zeilenstufenform ist. In anderen Worten: Sei R ein Ring, $Z \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ in Zeilenstufenform mit Zeilenrank l und Zeugenfunktion $r : \{1,\ldots,l\} \to \{1,\ldots,n\}$. Dann ist $L(Z)^{-1}(b) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $b_i = 0$ für alle $l < i \leq k$, und in diesem Fall ist die Komposition

$$\begin{aligned} L(Z)^{-1}(b) \subseteq R^n = F\big(\{1,\ldots,n\}, R\big) &\longrightarrow F\big(\{1,\ldots,n\}\backslash \mathrm{Im}(r), R\big) \cong R^{n-l} \\ x &\longmapsto x|_{\{1,\ldots,n\}\backslash \mathrm{Im}(r)} \end{aligned}$$

eine Bijektion. (Hinweis: Benutze Aufgabe 3, um auf die Situation von Beobachtung II.1.5 zu reduzieren.)