Aufgabe 1

(a) Für die Zeilenstufenform machen wir folgende Umformungen:

$$\begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\2&4&1&4&1&2&4\\3&1&0&0&3&1&3\\0&0&4&4&4&1&0\\4&3&3&2&1&0&4\end{pmatrix} \overset{II-1\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&0&3&3&0&0\\3&1&0&0&3&1&3\\0&0&4&4&4&1&0\\4&3&3&2&1&0&4\end{pmatrix} \overset{III-4\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&4&4&4&1&0\\4&3&3&2&1&0&4\end{pmatrix}$$

$$\overset{V-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&4&4&4&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{pmatrix} \overset{II\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&4&4&4&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{pmatrix} \overset{IV-4\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{V-1\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&1\\0&0&0&4&4&3&4\end{pmatrix} \overset{V-3\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&3&4\end{pmatrix} \overset{V-2\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&1&1&3&2&4\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{I-1\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&0&0&2&4&2\\0&0&1&1&1&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \overset{II-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&0&0&2&4&2\\0&0&1&0&0&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \overset{I-1\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&0&0&2&0&0\\0&0&1&0&0&3&2\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{II-2\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}2&4&0&0&2&0&0\\0&0&1&0&0&0&3\\0&0&0&3&3&0&0\\0&0&0&0&0&4&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Dabei ist die Matrix nach acht Umformungen in Zeilenstufenform, und nach den restlichen vier auch strikt.

(b) Wir nennen die Matrix in Zeilenstufenform (also die nach acht Umformungen) Z. Dann besitzt für $z \in \mathbb{Z}/5^5$ nach Beobachtung II.1.5 $L(Z)(x) = z$ genau dann eine Lösung, wenn $z_5 = 0$ ist. Mit Beobachtung II.2.2 (Bewiesen in Aufgabe 3) gilt für eine elementare Zeilenumformung e (also $e = s^\lambda_{a,c}, m^\lambda_a, t_{a,c}$), dass

$$\big(L(A)\big)(x) = b \Leftrightarrow \big(L(e(A))\big)(x) = e(b).$$

Insbesondere hat also $\big(L(A)\big)(x) = b$ genau dann eine Lösung, wenn $\big(L(e(A))\big)(x) = e(b)$ eine hat: Wir führen also die ersten acht Zeilenumformungen aus (a) für b durch und erhalten:

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix} \overset{II-1\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\4b_1+b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix} \overset{III-4\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\4b_1+b_2\\b_1+b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix} \overset{V-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\4b_1+b_2\\b_1+b_3\\b_4\\3b_1+b_5\end{pmatrix} \overset{II\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\b_1+b_3\\4b_1+b_2\\b_4\\3b_1+b_5\end{pmatrix} \overset{IV-4\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\b_1+b_3\\4b_1+b_2\\b_1+b_3+b_4\\3b_1+b_5\end{pmatrix}$$

$$\overset{V-1\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\b_1+b_3\\4b_1+b_2\\b_1+b_3+b_4\\2b_1+4b_3+b_5\end{pmatrix} \overset{V-3\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\b_1+b_3\\4b_1+b_2\\b_1+b_3+b_4\\2b_2+4b_3+b_5\end{pmatrix} \overset{V-2\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}b_1\\b_1+b_3\\4b_1+b_2\\b_1+b_3+b_4\\3b_1+2b_2+2b_3+3b_4+b_5\end{pmatrix} =: z$$

Somit hat $\big(L(A)\big)(x) = b$ genau dann eine Lösung, wenn $\big(L(Z)\big)(x) = z$ eine hat, was genau dann der Fall ist, wenn der letzte Eintrag verschwindet, also wenn

$$3b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 3b_4 + b_5 = 0.$$

(c) Zunächst erkennen wir, dass die Matrix in strikter Zeilenstufenform aus (a) den Zeilenrang $l = 4$ hat.

Um die Lösungsmenge $L(A)^{-1}(b)$ zu finden, führen wir die gleichen Umformungen wie in (a) nun auch für den Lösungsvektor b durch. Die ersten acht können wir aus (b) übernehmen und bekommen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0+2 \\ 4\cdot 0+1 \\ 0+2+2 \\ 3\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ergeben die restlichen vier Umformungen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{I-1\cdot II}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{II-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{I-1\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{II-2\cdot IV}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist also $\big(L(A)\big)(x) = b$ genau dann, wenn die Koordinaten von x folgendes Gleichungssystem lösen:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightsquigarrow \begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_5=4 \\ x_3+3x_7=2 \\ 3x_4+3x_5=1 \\ 4x_6+2x_7=4 \end{cases} \leftrightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 2+3x_2+4x_5 \\ x_3 = 2+2x_7 \\ x_4 = 2+4x_5 \\ x_6 = 1+2x_7 \end{cases}$$

Da die Sprünge der Zeilenstufenform in der 1., 3., 4. und 6. Spalte liegen, können wir x_2, x_5 und x_7 frei wählen (in anderen Worten: für jede Wahl dieser drei Koordinaten existiert genau eine Lösung, und diese sind unterschiedlich für verschiedene Wahlen). Die Werte von x_1, x_3, x_4 und x_6 sind dann eindeutig durch die Gleichungen oben bestimmt.

In anderen Worten: Wir haben gezeigt, dass folgende Abbildung von $\mathbb{Z}/5^{7-4} = \mathbb{Z}/5^3$ nach $\mathbb{Z}/5^7$ eine Bijektion auf die Lösungsmenge $L(A)^{-1}(b)$ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/5^3 &\longrightarrow \mathbb{Z}/5^7 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Dabei entspricht a_1 der frei wählbaren Koordinate x_2 von vorhin, a_2 entspricht x_5 und a_3 entspricht x_7.)

Aufgabe 2

Hier können wir die Umformungen aus dem Gauß-Algorithmus auch direkt auf den Lösungsvektor anwenden:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 9 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 15 & -8 & 6 \end{array}\right) \overset{III-1\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 15 & -8 & 6 \end{array}\right) \overset{IV-2\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{IV-2\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{IV-1\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \overset{I+1\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-2\cdot III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \overset{I-1\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \overset{II+1\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-1\cdot IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Die Matrix ist nun in Zeilenstufenform. Sie hat Zeilenrang $l = 4$, und in jeder Spalte kommt eine neue Stufe hinzu: Wir können also *keine* Koordinate frei wählen, und haben eine *eindeutige Lösung*: Das assoziierte Gleichungssystem ist

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 = 4 \\ 5x_2 = 0 \\ 3x_3 = 6 \\ -x_4 = -4 \end{array}\right. \leftrightsquigarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 4 \end{array}\right.$$

Somit ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystem der Vektor $x = (2,0,2,4)$:

$$L(A)^{-1}(b) = \{(2,0,2,4)\}.$$

Hey, das sieht ja aus wie das aktuelle Jahr! Lustiger Zufall.

Aufgabe 3

Bemerkung. Die Notation $L(A)^{-1}(b)$ für die Lösungsmenge ist schlecht gewählt: Sie ist definiert als

$$L(A)^{-1}(b) := \mathrm{Pre}_{L(A)}(\{b\}) = \left\{x \in R^n \middle| \big(L(A)\big)(x) = b\right\}.$$

Insbesondere ist dies eine *Menge*, kein einzelner Vektor. Das ist missverständlich: Falls $L(A)$ invertierbar ist (was nicht der Fall sein muss!), bezeichnet die Notation $L(A)^{-1}$ ebenfalls die Umkehrfunktion von $L(A)$, also ist $L(A)^{-1}(b)$ dann ebenfalls ein *Element* (nämlich das eindeutige Element der entsprechenden Menge). Die Notation für die Lösungsmenge im Skript wurde deswegen nun auf $L(A;b)$ geändert.

(a) Sei $x \in R^n$. Dann ist $x \in L(A)^{-1}(b)$ genau dann, wenn $\big(L(A)\big)(x) = b$ ist. Also wollen wir zeigen, dass

$$\big(L(A)\big)(x) = b \Leftrightarrow \big(L(s^{\lambda}_{a,c}(A))\big)(x) = s^{\lambda}_{a,c}(b).$$

Sei zunächst $\big(L(A)\big)(x) = b$. Dann ist für $1 \le i \le k$:

$$
\begin{aligned}
\Big(\big(L(s_{a,c}^{\lambda}(A))\big)(x)\Big)_i &= \sum_{j=1}^{n} (s_{a,c}^{\lambda}(A))_{i,j} \cdot x_j \\
&= \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (A_{i,j} + \lambda \cdot A_{a,j}) \cdot x_j & i = c \\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & i \neq c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j\Big) + \lambda \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{a,j} \cdot x_j\Big) & i = c \\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & i \neq c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_i + \lambda \cdot \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_a & i = c \\ \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_i & i \neq c \end{cases} \\
&= \begin{cases} b_i + \lambda \cdot b_a & i = c \\ b_i & i \neq c \end{cases} \\
&= \big(s_{a,c}^{\lambda}(b)\big)_i .
\end{aligned}
$$

Somit folgt $\big(L(s_{a,c}^{\lambda}(A))\big)(x) = s_{a,c}^{\lambda}(b)$, weil alle Koordinaten übereinstimmen.

Für die umgekehrte Richtung bemerken wir, dass $\big(s_{a,c}^{\lambda}\big)^{-1} = s_{a,c}^{-\lambda}$ ist: Wenn ich erst das λ-Fache der a-ten Zeile auf die c-te addiere, und danach wieder abziehe, ist am Ende nichts passiert. (Achtung: Hier benutzen wir, dass $a \neq c$ ist!) Insbesondere ist also mit dem, was wir eben gezeigt haben,

$$\big(L(s_{a,c}^{\lambda}(A))\big)(x) = s_{a,c}^{\lambda}(b) \Rightarrow \big(L(s_{a,c}^{-\lambda}(s_{a,c}^{\lambda}(A)))\big)(x) = s_{a,c}^{-\lambda}(s_{a,c}^{\lambda}(b)) \Leftrightarrow \big(L(A)\big)(x) = b.$$

(b) Sei $x \in R^n$. Wie oben wollen wir zeigen, dass

$$\big(L(A)\big)(x) = b \Leftrightarrow \big(L(m_a^{\lambda}(A))\big)(x) = m_a^{\lambda}(b).$$

Sei zunächst wieder $\big(L(A)\big)(x) = b$. Dann ist für $1 \le i \le k$:

$$
\begin{aligned}
\Big(\big(L(m_a^{\lambda}(A))\big)(x)\Big)_i &= \sum_{j=1}^{n} (m_a^{\lambda}(A))_{i,j} \cdot x_j \\
&= \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (\lambda \cdot A_{i,j}) \cdot x_j & i = a \\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & i \neq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda \cdot \big(\sum_{j=1}^{n} \cdot A_{i,j} \cdot x_j\big) & i = a \\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j & i \neq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda \cdot \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_i & i = a \\ \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_i & i \neq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda \cdot b_i & i = a \\ b_i & i \neq a \end{cases} \\
&= \big(m_a^{\lambda}(b)\big)_i .
\end{aligned}
$$

Also folgt $\big(L(m_a^{\lambda}(A))\big)(x) = m_a^{\lambda}(b)$.

Wieder folgt die umgekehrte Richtung direkt, weil $(m_a^{\lambda})^{-1} = m_a^{\frac{1}{\lambda}}$ ist (die a-te Zeile erst mit λ und dann mit $\frac{1}{\lambda}$ zu multiplizieren ändert nichts). Also ist

$$\big(L(m_a^{\lambda}(A))\big)(x) = m_a^{\lambda}(b) \Rightarrow \big(L(m_a^{\frac{1}{\lambda}}(m_a^{\lambda}(A)))\big)(x) = m_a^{\frac{1}{\lambda}}(m_a^{\lambda}(b)) \Leftrightarrow \big(L(A)\big)(x) = b.$$

(c) Es wird nicht überraschen, dass wir analog zu den ersten beiden Aufgaben vorgehen: Sei $x \in R^n$. Wir wollen zeigen, dass

$$\big(L(A)\big)(x) = b \Leftrightarrow \big(L(t_{a,c}(A))\big)(x) = t_{a,c}(b).$$

Sei zunächst wieder $\big(L(A)\big)(x) = b$. Dann ist für $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{aligned}
\Big(\big(L(t_{a,c}(A))\big)(x)\Big)_i &= \sum_{j=1}^{n} (t_{a,c}(A))_{i,j} \cdot x_j \\
&= \begin{cases} \sum_{j=1}^n A_{c,j} \cdot x_j & i = a \\ \sum_{j=1}^n A_{a,j} \cdot x_j & i = c \\ \sum_{j=1}^n A_{i,j} \cdot x_j & i \neq a, c \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_c & i = a \\ \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_a & i = c \\ \Big(\big(L(A)\big)(x)\Big)_i & i \neq a, c \end{cases} \\
&= \begin{cases} b_c & i = a \\ b_a & i = c \\ b_i & i \neq a, c \end{cases} \\
&= \big(t_{a,c}(b)\big)_i.
\end{aligned}$$

Also folgt $\big(L(t_{a,c}(A))\big)(x) = t_{a,c}(b)$.

Wieder folgt die umgekehrte Richtung direkt, dieses mal weil $(t_{a,c})^{-1} = t_{a,c}$ ist (die a-te Zeile mit der c-ten zweimal zu vertauschen ändert nichts). Also ist

$$\big(L(t_{a,c}(A))\big)(x) = t_{a,c}(b) \Rightarrow \big(L(t_{a,c}(t_{a,c}(A)))\big)(x) = t_{a,c}(t_{a,c}) \Leftrightarrow \big(L(A)\big)(x) = b.$$

Aufgabe 4

Sei R ein Ring, $Z \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ in Zeilenstufenform mit Zeilenrank l und Zeugenfunktion $r : \{1,\dots,l\} \to \{1,\dots,n\}$. Dann gibt es nach dem Gauß'schen Eliminierungssatz (II.2.3 im Skript) Abbildungen

$$f_1,\dots,f_d : \mathrm{Mat}(k,n,R) \to \mathrm{Mat}(k,n,R)$$

(wobei $d = \frac{(l-1)l}{2}$ ist), sodass jedes f_i eine Zeilenumformung von Typ I ist, und die Matrix

$$\big(f_1 \circ \cdots \circ f_d\big)(Z) \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$$

in *strikter* Zeilenstufenform ist.

Dass f_i von Typ I ist, heißt, dass es $\lambda_i \in R$ und $1 \leq a, c \leq k$ gibt mit $a \neq c$ und $f_i = s^{\lambda_i}_{a_i,c_i}$. Mit Aufgabe 3(a) gilt dann für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ und $a \in R^n$

$$L(A)^{-1}(a) = L\Big(s^{\lambda_i}_{a_i,c_i}(A)\Big)^{-1}\Big(s^{\lambda_i}_{a_i,c_i}(a)\Big).$$

Induktiv folgt also

$$L(Z)^{-1}(b) = L\bigg(\Big(s^{\lambda_1}_{a_1,c_1} \circ \cdots \circ s^{\lambda_d}_{a_d,c_d}\Big)(Z)\bigg)^{-1}\bigg(\Big(s^{\lambda_1}_{a_1,c_1} \circ \cdots \circ s^{\lambda_d}_{a_d,c_d}\Big)(b)\bigg).$$

Die Matrix $\Big(s^{\lambda_1}_{a_1,c_1} \circ \cdots \circ s^{\lambda_d}_{a_d,c_d}\Big)(A)$ ist in strikter Zeilenstufenform, und vom Gauß-Algorithmus wissen wir, dass sich Zeilenrang l und Zeugenfunktion r nicht verändert haben. Also gilt mit Beobachtung II.1.5, dass

$$L(Z)^{-1}(b) = L\bigg(\Big(s^{\lambda_1}_{a_1,c_1} \circ \cdots \circ s^{\lambda_d}_{a_d,c_d}\Big)(Z)\bigg)^{-1}\bigg(\Big(s^{\lambda_1}_{a_1,c_1} \circ \cdots \circ s^{\lambda_d}_{a_d,c_d}\Big)(b)\bigg) \neq \emptyset$$

genau dann, wenn für $i > l$ die Koordinaten

$$\left(\left(s_{a_1,c_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ s_{a_d,c_d}^{\lambda_d}\right)(b)\right)_i = 0$$

verschwinden. Im Gauß-Algorithmus haben wir aber nur Zeilenumformungen in den Zeilen 1 bis l benutzt, um Z in strikte Zeilenstufenform zu bringen. Also haben sich die Koordinaten jenseits von l nicht verändert, und wir haben für $i > l$

$$\left(\left(s_{a_1,c_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ s_{a_d,c_d}^{\lambda_d}\right)(b)\right)_i = b_i.$$

Somit ist der erste Teil gezeigt: $L(Z)^{-1}(b) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $b_i = 0$ für $i > l$ ist.

Weiterhin gibt uns Beobachtung II.1.5, dass in diesem Fall die Komposition

$$\begin{aligned} L(Z)^{-1}(b) = L\left(\left(s_{a_1,c_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ s_{a_d,c_d}^{\lambda_d}\right)(Z)\right)^{-1}\left(\left(s_{a_1,c_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ s_{a_d,c_d}^{\lambda_d}\right)(b)\right) \subseteq R^n = F\big(\{1,\dots,n\},R\big) &\longrightarrow F\big(\{1,\dots,n\}\setminus \mathrm{Im}(r),R\big) \cong R^{n-l} \\ x &\longmapsto x|_{\{1,\dots,n\}\setminus \mathrm{Im}(r)} \end{aligned}$$

eine Bijektion ist, womit auch der zweite Teil gezeigt ist.