Aufgabe 1 (4 Punkte)

In einer verstaubten Bibliothek tief unter der Universität liegt ein Raum, der längst vergessene Geheimnisse der Linearen Algebra enthält. Die Legende besagt, dass alle, die die Schriften dort gelesen haben, besonders fehlerfrei Matrizen multiplizieren können. Leider ist der Raum aber komplett dunkel. Nachdem ihr euch etwas herumgetastet habt, findet ihr heraus, dass es fünf Lampen und fünf Lichtschalter gibt. Jeder Schalter scheint fest mit einigen der Lampen verkabelt zu sein: Wenn er betätigt wird, gehen die dazugehörigen Lampen an, falls sie vorher ausgeschaltet waren, und aus, falls sie vorher eingeschaltet waren. Ihr macht folgende Beobachtungen:

- Der obere Schalter neben der Eingangstür bedient alle Lampen außer jener über der Tafel.
- Der untere Schalter neben der Eingangstür bedient alle Lampen außer jener über dem Lesepult.
- Der Schalter bei der Tafel bedient die Lampe über der Tafel und jene im linken Gang.
- Der linke Schalter am Lesepult die Lampe über dem Lesepult und jene im rechten Gang.
- Der rechte Schalter am Lesepult bedient die Lampe über dem Lesepult, jene im linken Gang, sowie die Lampe über der Eingangstür.

Um die Geheimnisse zu lüften, muss die Bibliothek vollständig beleuchtet sein. Welche Schalter müssen betätigt werden, damit alle Lampen gleichzeitig leuchten? Euch beschleicht das Gefühl, dass dieses Problem mit einem Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/2$ gelöst werden könnte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein Ring, M, N, P R-Moduln und $\varphi : M \to N$ sowie $\psi : N \to P$ R-lineare Abbildungen. Zeige:

(a) Die Komposition $\psi \circ \varphi$ ist R-linear.

(b) Falls φ bijektiv ist, ist die Umkehrfunktion φ^{-1} R-linear.

(c) Sei $U \subseteq M$ ein Untermodul. Dann ist das Bild $\mathrm{Im}_\varphi(U) \subseteq N$ ein Untermodul. Insbesondere ist das Bild von φ, also $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}_\varphi(M)$, ein Untermodul.

(d) Sei $V \subseteq N$ ein Untermodul. Dann ist das Urbild $\mathrm{Pre}_\varphi(V) \subseteq M$ ein Untermodul. Insbesondere ist der Kern von φ, also $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Pre}_\varphi(0)$, ein Untermodul.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien M, N abelsche Gruppen. Für zwei Abbildungen $f, g : M \to N$ notieren wir mit $f + g$ die komponentenweise Addition (vgl. Aufgabe 1(b) auf Blatt 5).

(a) Zeige: Falls $f, g : M \to N$ sowie $h : N \to P$ und $h' : L \to M$ Gruppenhomomorphismen sind, gilt

$$h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g) \text{ und } (f + g) \circ h' = (f \circ h') + (g \circ h').$$

Folgere, dass die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ aller Gruppenhomomorphismen $f : M \to M$ einen Ring bildet mit $+$ als Addition und $\circ$ als Multiplikation.

(b) Sei nun R ein Ring und M ein R-Modul. Zeige: Die Teilmenge $\mathrm{Lin}_R(M, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ aller R-linearen Abbildungen $f : M \to M$ bildet einen Unterring von $\mathrm{Grp}(M, M)$.

(c) Zeige anhand eines Beispiels: Die Menge $F(M, M)$ *aller* Abbildungen $f : M \to M$ bildet im allgemeinen *keinen* Ring mit $+$ als Addition und $\circ$ als Multiplikation.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Für einen Ring A bezeichnen wir mit A^{op} den *Gegenring (opposite ring)*: Er hat die gleichen Elemente und die gleiche Addition wie A, und für $a, b \in A$ ist $a \cdot^{\mathrm{op}} b = b \cdot a$, es wird also wie in A multipliziert, nur in umgekehrter Reihenfolge. (Insbesondere ist $A = A^{\mathrm{op}}$ wenn A kommutativ ist.)

(a) Zeige: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}\colon M \times \mathrm{Lin}_R(M,M) &\longrightarrow M \\ (m,\varphi) &\longmapsto \varphi(m) \end{aligned}$$

definiert eine $\mathrm{Lin}_R(M,M)^{\mathrm{op}}$-Modul-Struktur auf M. (Hier hat $\mathrm{Lin}_R(M,M)$ die Ringstruktur aus Aufgabe 3.)

(b) Konstruiere eine Bijektion

$$\Big\{R\text{-Modul-Strukturen auf } M\Big\} \longleftrightarrow \Big\{\text{Ringhomomorphismen } f : R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M,M)^{\mathrm{op}}\Big\}.$$

Folgere, dass jede abelsche Gruppe eine eindeutige $\mathbb{Z}$-Modul-Struktur hat, und eine $\mathbb{Q}$-Vektorraum-Struktur eindeutig ist, wenn sie existiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei R ein Ring, $1 \le k, n \in \mathbb{N}$, sowie $1 \le a, c \le k$ mit $a \neq c$ und $\lambda \in R$.

(a) Sei $S^\lambda_{a,c} \in \mathrm{Mat}(k,k,R)$ definiert als

$$(S^\lambda_{a,c})_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \lambda & i = c, j = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige: Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ ist $s^\lambda_{a,c}(A) = S^\lambda_{a,c} \cdot A$, wobei $s^\lambda_{a,c}$ die elementare Zeilenumformung aus Konstruktion II.2.1 ist.

(b) Finde eine Matrix $T_{a,c} \in \mathrm{Mat}(k,k,R)$, sodass für jedes $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ gilt, dass $t_{a,c}(A) = T_{a,c} \cdot A$.

(c) Sei nun λ eine Einheit. Finde eine Matrix $M^\lambda_a \in \mathrm{Mat}(k,k,R)$, sodass für jedes $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ gilt, dass $m^\lambda_a(A) = M^\lambda_a \cdot A$.

(d) Wir können die Matrizen $S^\lambda_{a,c}$, $T_{a,c}$ und M^λ_a auch von rechts an eine Matrix mit k Spalten multiplizieren. Welchen Effekt haben dann die drei Abbildungen

$$- \cdot S^\lambda_{a,c}, - \cdot T_{a,c}, - \cdot M^\lambda_a : \mathrm{Mat}(m,k,R) \to \mathrm{Mat}(m,k,R)?$$