Aufgabe 1

Wir übersetzen die Situation in ein Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/2$: Dafür definieren wir für jede Lampe eine Variable $l_i \in \mathbb{Z}/2$, wobei $l_i = 0$ genau dann, wenn die entsprechende Lampe ausgeschaltet ist, und für jeden Schalter eine Variable $s_j \in \mathbb{Z}/2$, wobei $s_j = 0$ genau dann, wenn der Schalter in der ursprünglichen Position ist. Wir können eine beliebige Ordnung wählen, unsere ist folgende:

l_1 ist die Lampe bei der Tafel	s_1 ist der obere Schalter neben der Eingangstür
l_2 ist die Lampe am Lesepult	s_2 ist der untere Schalter neben der Eingangstür
l_3 ist die Lampe im linken Gang	s_3 ist der Schalter bei der Tafel
l_4 ist die Lampe im rechten Gang	s_4 ist der linke Schalter am Lesepult
l_5 ist die Lampe über der Eingangstür	s_5 ist der rechte Schalter am Lesepult.

Dann lassen sich die Beobachtungen gerade in folgende Gleichung in $\mathbb{Z}/2^5$ übersetzen:

$$s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise bedeutet das: Falls $s_1 = 1$ und alle anderen $s_j = 0$ ist, ist $l_1 = 0$ und alle anderen $l_i = 1$. Das ist genau die Aussage, dass der erste Schalter (Eingangstür oben) alle Lampen außer der ersten Lampe (Tafel) bedient.

Unser Ziel ist es also, Werte für $s_1, \ldots, s_5$ zu finden, sodass alle $l_i = 1$ sind. Das ist ein lineares Gleichungssystem! Wir bilden also die assoziierte Matrix samt Lösungsvektor und starten mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0&1&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{I\leftrightarrow II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

$$\overset{IV-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{V-I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0 \end{array}\right) \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0 \end{array}\right)$$

$$\overset{IV-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&0 \end{array}\right) \overset{V-II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1 \end{array}\right) \overset{III\leftrightarrow IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&1 \end{array}\right)$$

$$\overset{V-III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}\right) \overset{V-IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{II-III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

$$\overset{I-IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{I-V}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right) \overset{II-V}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-V}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist also eindeutig und lässt sich direkt ablesen:

$$s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 0, s_4 = 1, s_5 = 1.$$

Es müssen also alle Schalter außer jenem bei der Tafel betätigt werden, um alle Lampen gleichzeitig zum leuchten zu bringen.

Bemerkung. Es ist natürlich möglich—und selbstverständlich erlaubt—, durch geschicktes Umtauschen von Zeilen dieses Gleichungssystem in weniger Schritten zu lösen.

Aufgabe 2

(a) Um zu sehen, das $\psi \circ \varphi : M \to P$ R-linear ist, müssen wir zeigen, dass es ein Gruppenhomomorphismus (also ein Monoidhomomorphismus) ist, und dass es homogen ist.

Für ersteres seien $m, m' \in M$. Dann ist

$$(\psi \circ \varphi)(m + m') = \psi\big(\varphi(m + m')\big) = \psi\big(\varphi(m) + \varphi(m')\big) = \psi\big(\varphi(m)\big) + \psi\big(\varphi(m')\big) = (\psi \circ \varphi)(m) + (\psi \circ \varphi)(m').$$

Genauso ist $(\psi \circ \varphi)(0) = \psi\big(\varphi(0)\big) = \psi(0) = 0$. (Wir haben hier übrigens weder benutzt, dass M und P Gruppen sind, noch, dass sie kommutativ sind: Es ist also allgemein die Komposition von zwei Monoidhomomorphismen wieder ein Monoidhomomorphismus.)

Für die Homogenität sei $m \in M$, $r \in R$. Dann ist

$$(\psi \circ \varphi)(m \cdot r) = \psi\big(\varphi(m \cdot r)\big) = \psi\big(\varphi(m) \cdot r\big) = \psi\big(\varphi(m)\big) \cdot r = (\psi \circ \varphi)(m) \cdot r.$$

(b) Wieder müssen wir zeigen, dass φ^{-1} ein Monoidhomomorphismus und homogen ist. Ersteres gilt wieder allgemein für Monoidhomomorphismen: Es ist $\varphi(0) = 0$, also $\varphi^{-1}(0) = 0$, und für $n, n' \in N$ ist

$$\varphi\big(\varphi^{-1}(n) + \varphi^{-1}(n')\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(n)\big) + \varphi\big(\varphi^{-1}(n')\big) = n + n' = \varphi\big(\varphi^{-1}(n + n')\big),$$

also folgt mit Injektivität von φ, dass $\varphi^{-1}(n) + \varphi^{-1}(n') = \varphi^{-1}(n + n')$.

Für Homogenität sei $n \in N$, $r \in R$, dann ist

$$\varphi\big(\varphi^{-1}(n) \cdot r\big) = \varphi\big(\varphi^{-1}(n)\big) \cdot r = n \cdot r = \varphi\big(\varphi^{-1}(n \cdot r)\big),$$

also folgt wieder mit Injektivität von φ, dass $\varphi^{-1}(n) \cdot r = \varphi^{-1}(n \cdot r)$.

(c) Damit $\mathrm{Im}_\varphi(U) \subseteq N$ ein Untermodul ist, muss 0 enthalten sein, und es muss unter Summen und Skalierung abgeschlossen sein:

Da $\varphi(0) = 0$ ist, ist $0 \in \mathrm{Im}_\varphi(U)$.

Falls $n, n' \in \mathrm{Im}_\varphi(U)$ sind, gibt es $u, u' \in U$ mit $\varphi(u) = n$ und $\varphi(u') = n'$. Dann ist

$$n + n' = \varphi(u) + \varphi(u') = \varphi(u + u') \in \mathrm{Im}_\varphi(U).$$

(Wieder ist hier eigentlich die Aussage, dass das Bild von Untermonoiden wieder ein Untermonoid ist.)

Für ein $r \in R$, $n \in \mathrm{Im}_\varphi(U)$ gibt es dann wieder ein $u \in U$ mit $\varphi(u) = n$. Dann ist

$$n \cdot r = \varphi(u) \cdot r = \varphi(u \cdot r) \in \mathrm{Im}_\varphi(U).$$

(d) Damit $\mathrm{Pre}_\varphi(V) \subseteq M$ ein Untermodul ist, muss wieder 0 enthalten sein, und es muss unter Summen und Skalierung abgeschlossen sein:

Da $\varphi(0) = 0 \in V$ ist, $0 \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$.

Für $m, m' \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$ gilt $\varphi(m), \varphi(m') \in V$. Dann ist

$$\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m') \in V,$$

also ist $m + m' \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$. (Natürlich ist das wieder eigentlich eine Aussage über Untermonoide.)

Sei nun $m \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$ und $r \in R$, dann ist $\varphi(m9 \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$ und somit

$$\varphi(m \cdot r) = \varphi(m) \cdot r \in \mathrm{Pre}_\varphi(V),$$

also ist $m \cdot r \in \mathrm{Pre}_\varphi(V)$.

Aufgabe 3

(a) Sei $m \in M$. Dann ist

$$\big(h\circ(f+g)\big)(m) = h\big((f+g)(m)\big) = h\big(f(m)+g(m)\big) = h\big(f(m)\big)+h\big(g(m)\big) = (h\circ g)(m)+(h\circ g)(m) = \big((h\circ f)+(h\circ g)\big)(m),$$

also ist $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$. Genauso ist für $l \in L$

$$\big((f+g)\circ h'\big)(l) = (f+g)\big(h'(l)\big) = f\big(h'(l)\big) + g\big(h'(l)\big) = (f \circ h')(l) + (g \circ h')(l) = \big((f \circ h') + (g \circ h')\big)(l),$$

also ist $(f + g) \circ h' = (f \circ h') + (g \circ h')$.

Damit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ einen Ring bildet, spezifizieren wir zunächst die neutralen Elemente: Das neutrale Element der (punktweisen) Addition + ist const_0, das neutrale Element der Multiplikation $\circ$ ist Id_M. Wir müssen folgendes zeigen:

- $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M), +, \mathrm{const}_0)$ bildet eine abelsche Gruppe: Wir wissen bereits von Blatt 5, Aufgabe 1(b), dass $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M), +, \mathrm{const}_0)$ ein Monoid ist.

  Nun ist es einfach zu sehen, dass Kommutativität von M geerbt wird: Für jedes $m \in M$ ist $(f + g)(m) = f(m) + g(m) = g(m) + f(m) = (g + f)(m)$.

  Für die Existenz von Inversen sei $f \in \mathrm{Grp}(M, M)$. Wir definieren eine Abbildung $-f : M \to M$ mit $(-f)(m) := -(f(m))$. Das ist wieder ein Homomorphismus, da $(-f)(0) = -f(0) = -0 = 0$, und für $m, m' \in M$ ist

  $$(-f)(m+m') = -\big(f(m+m')\big) = -\big(f(m)+f(m')\big) = -\big(f(m)\big)-\big(f(m')\big) = (-f)(m)+(-f)(m').$$

  Insbesondere bildet $(-f)$ dann das Inverse zu f in $\mathrm{Grp}(M, M)$, da für $m \in M$ gilt:

  $$\big((-f)+f\big)(m) = (-f)(m) + f(m) = -f(m) + f(m) = 0 = \mathrm{const}_0(m).$$

- $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M), \circ, \mathrm{Id}_M)$ bildet einen Monoid: Wir wissen bereits, dass die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismus ist (2(a)), dass die Komposition von Funktionen assoziativ ist (Bemerkung I.5.7), und dass die Identität neutral bezüglich der Komposition ist (Blatt 3, 1(b)). Das heißt zusammen genau, dass ein Monoid vorliegt.
- Distributivität ist gerade Teilaufgabe (a).
- Absorption heißt, dass für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ gilt: $\mathrm{const}_0 \circ f = \mathrm{const}_0 = f \circ \mathrm{const}_0$. Sei dafür $m \in M$, dann ist

  $$(\mathrm{const}_0 \circ f)(m) = \mathrm{const}_0\big(f(m)\big) = 0 = \mathrm{const}_0(m) = 0 = f(0) = f\big(\mathrm{const}_0(m)\big) = (f \circ \mathrm{const}_0)(m).$$

(b) Wir wissen bereits, dass $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ ein Ring ist. Um zu sehen, dass $\mathrm{Lin}_R(M, M) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M, M)$ ein Unterring ist, müssen wir zeigen, dass die neutralen Elemente sowie Summen, Inverse und Kompositionen von R-linearen Funktionen wieder R-linear sind:

- $\mathrm{const}_0 \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, da für $m \in M$, $r \in R$ gilt: $\mathrm{const}_0(m \cdot r) = 0 = 0 \cdot r = \mathrm{const}_0(m) \cdot r$.
- $\mathrm{Id}_M \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, da für $m \in M$, $r \in R$ gilt: $\mathrm{Id}_M(m \cdot r) = m \cdot r = \mathrm{Id}_M(m) \cdot r$.
- Falls $f, g \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, ist auch $f + g \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, da für $m \in M$, $r \in R$ gilt:

$$(f+g)(m \cdot r) = f(m \cdot r) + g(m \cdot r) = f(m) \cdot r + g(m) \cdot r = \big(f(m) + g(m)\big) \cdot r = \big((f+g)(m)\big) \cdot r.$$

- Falls $f \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, ist auch $-f \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, da für $m \in M$, $r \in R$ gilt:

$$(-f)(m \cdot r) = -f(m \cdot r) = -f(m) \cdot r = (-f)(m) \cdot r.$$

- Falls $f, g \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, ist auch $f \circ g \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$, das ist 2(a).

(c) Aus (a) lässt sich erahnen, dass die Distributivität das Problem ist, wenn wir keine Homomorphismen haben: Sei bspw. $M = \mathbb{Z}$, und betrachte die Abbildung

$$q : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2.$$

Dann ist für $0 \neq k \in \mathbb{Z}$:

$$\big(q \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} + \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})\big)(k) = q(k+k) = (2k)^2 = 4k^2 \neq 2k^2 = q(k) + q(k) = \big((q \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}) + (q \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})\big)(k),$$

also ist $q \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} + \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}) \neq (q \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}) + (q \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}})$.

Aufgabe 4

(a) M ist ein R-Modul, also insbesondere bereits eine abelsche Gruppe. Es ist also nur zu überprüfen, dass die Abbildung ev mit den Operationen auf M und $\mathrm{Lin}_R(M,M)^{\mathrm{op}}$ kompatibel ist. Seien $m, m' \in M$ und $f, g \in \mathrm{Lin}_R(M,M)$. Dann ist:

- $m \cdot \mathrm{Id}_M = \mathrm{ev}(m, \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_M(m) = m$,
- $m \cdot (f \circ_{\mathrm{op}} g) = m \cdot (g \circ f) = \mathrm{ev}(m, g \circ f) = (g \circ f)(m) = g\big(f(m)\big) = \mathrm{ev}\big(f(m), g\big) = \mathrm{ev}\big(\mathrm{ev}(m,f), g\big) = (m \cdot f) \cdot g$,
- $m \cdot (f+g) = \mathrm{ev}(m, f+g) = (f+g)(m) = f(m) + g(m) = \mathrm{ev}(m,f) + \mathrm{ev}(m,g) = m \cdot f + m \cdot g$,
- $(m+m') \cdot f = \mathrm{ev}(m+m', f) = f(m+m') = f(m) + f(m') = \mathrm{ev}(m,f) + \mathrm{ev}(m',f) = m \cdot f + m' \cdot f$,

(b) Wir konstruieren zunächst eine Abbildung von rechts nach links. Sei $f : R \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M,M)^{\mathrm{op}}$ ein Ringhomomorphismus. Für die Lesbarkeit notieren wir $f_r := f(r)$. Dann definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m, r) &\longmapsto f_r(m). \end{aligned}$$

(Bemerke: Das ist genau das Currying von f, siehe Blatt 3, Aufgabe 3.) Wir behaupten nun, dass diese Abbildung M zu einem R-Modul macht. Seien dafür $m, m' \in M$ und $r, r' \in R$. Dann gilt:

- $m \cdot 1 = f_1(m) = \mathrm{Id}_M(m) = m$,
- $m \cdot (r \cdot r') = f_{r \cdot r'}(m) = \big(f_r \circ_{\mathrm{op}} f_{r'}\big)(m) = \big(f_{r'} \circ f_r\big)(m) = f_{r'}\big(f_r(m)\big) = f_{r'}(m \cdot r) = (m \cdot r) \cdot r'$.
- $m \cdot (r + r') = f_{r+r'}(m) = (f_r + f_{r'})(m) = f_r(m) + f_{r'}(m) = m \cdot r + m \cdot r'$.
- $(m + m') \cdot r = f_r(m+m') = f_r(m) + f_r(m') = m \cdot r + m' \cdot r$.

Wenn umgekehrt M ein R-Modul ist, definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(M,M)^{\mathrm{op}} \\ r &\longmapsto \big(f_r : m \mapsto m \cdot r\big). \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir, dass dies wohldefiniert ist, also dass f_r auch tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist: Es ist $f_r(0) = 0 \cdot r = 0$, und für $m, m' \in M$ ist $f_r(m+m') = (m+m') \cdot r = m \cdot r + m' \cdot r = f_r(m) + f_r(m')$.

Wir behaupten nun, dass f ein Ringhomomorphismus ist. Seien $r, r' \in R$, und $m \in M$. Dann ist:

- $f_0(m) = m \cdot 0 = 0 = \mathrm{const}_0(m)$, also ist $f(0) = \mathrm{const}_0$,
- $f_{r+r'}(m) = m \cdot (r + r') = m \cdot r + m \cdot r' = f_r(m) + f_{r'}(m)$, also ist $f(r + r') = f(r) + f(r')$,
- $f_1(m) = m \cdot 1 = m = \mathrm{Id}_M(m)$, also ist $f(1) = \mathrm{Id}_M$,
- $f_{r\cdot r'}(m) = m \cdot (r \cdot r') = (m \cdot r) \cdot r' = f_{r'}\big(f_r(m)\big) = \big(f_{r'} \circ f_r\big)(m) = \big(f_r \circ_{\mathrm{op}} f_{r'}\big)(m)$, also ist $f_{r\cdot r'} = f_r \circ_{\mathrm{op}} f_{r'}$.

Nun bemerken wir, dass unsere beiden Abbildungen

$$\big\{\mu : M \times R \to M \,|\, \mu \text{ macht } M \text{ zu einem } R\text{-Modul}\big\} \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}\big(R, \mathrm{Grp}(M, M)^{\mathrm{op}}\big)$$

per Konstruktion nur Einschränkungen der Abbildungen

$$F(M \times R, M) \rightleftarrows F(R, F(M, M)),$$

sind, die wir für die Bijektion aus Blatt 3, Aufgabe 3 konstruiert haben. Insbesondere sind sie also zueinander invers.

Nun folgern wir noch, dass jede abelsche Gruppe A eine eindeutige $\mathbb{Z}$-Modul-Struktur hat: Wir haben eben gezeigt, dass $\mathbb{Z}$-Modul-Strukturen auf A in Bijektion stehen zu Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathrm{Grp}(M, M)^{\mathrm{op}}$. Aber mit Blatt 7, Aufgabe 1(b) gibt es einen eindeutigen solchen Ringhomomorphismus. (Die resultierende Modul-Struktur ist natürlich die einzig sinnvolle, für $n \in \mathbb{N}$ ist $r \cdot n$ eine Summe von n Kopien von r, und für negative Zahlen kommt noch ein Vorzeichen dazu.)

Genauso korrespondieren $\mathbb{Q}$-Vektorraum-Strukturen auf A zu Ringhomomorphismen $\mathbb{Q} \to \mathrm{Grp}(M, M)^{\mathrm{op}}$. Diese sind immer eindeutig, mit dem gleichen Argument wie in Blatt 7, Aufgabe 1(c), und existieren genau dann, wenn für alle $0 \neq n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mathrm{Id}_M \cdot n$ (also die n-fache Summe von Identitäten) invertierbar ist, in anderen Worten: M ist genau dann ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $m \in M$ ein $m' \in M$ existiert mit $m = m' \cdot n$. Solche Gruppen heißen *teilbar*.

Aufgabe 5

(a) Sei $1 \leq i, j \leq k$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\big(S^{\lambda}_{a,c} \cdot A\big)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} \big(S^{\lambda}_{a,c}\big)_{i,l} \cdot A_{l,j} \\
&= \begin{cases} A_{i,j} & i \neq c \\ A_{i,j} + \lambda \cdot A_{a,j} & i = c \end{cases} \\
&= \big(s^{\lambda}_{a,c}(A)\big)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Somit ist auch $S^{\lambda}_{a,c} \cdot A = s^{\lambda}_{a,c}(A)$.

(b) Wir definieren $T_{a,c} \in \mathrm{Mat}(k, k, R)$ wie folgt:

$$(T_{a,c})_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \wedge i, j \notin \{a, c\}, \\ 1 & i = a \wedge j = c, \\ 1 & i = c \wedge j = a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: $T_{a,c}$ hat 1en in den Einträgen (i, i) für $i \neq a, c$, sowie in den Einträgen (a, c) und (c, a). Es ist also ist die Einheitsmatrix, bei der die a-te und die c-te Zeile vertauscht wurden: $T_{a,c} = t_{a,c}(\mathbb{1}_k)$.

Dann ist für $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ und $1 \le i,j \le k$:

$$\begin{aligned}(T_{a,c} \cdot A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} (T_{a,c})_{i,l} \cdot A_{l,j} \\ &= \begin{cases} A_{i,j} & i \neq a,c \\ A_{c,j} & i = a \\ A_{a,j} & i = c \end{cases} \\ &= \left(t_{a,c}(A)\right)_{i,j}.\end{aligned}$$

Es ist also $T_{a,c} \cdot A = t_{a,c}(A)$.

(c) Wir definieren $M_a^\lambda \in \mathrm{Mat}(k,k,R)$ wie folgt:

$$\left(M_a^\lambda\right)_i, j = \begin{cases} 1 & i = j \neq a \\ \lambda & i = j = a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: M_a^λ ist also die Einheitsmatrix, bei der die a-te 1 auf der Diagonalen durch λ ersetzt wurde. Also ist $M_a^\lambda = m_a^\lambda(\mathbb{1}_k)$.
Dann ist für $A \in \mathrm{Mat}(k,n,R)$ und $1 \le i,j \le k$:

$$\begin{aligned}(M_a^\lambda \cdot A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} (M_a^\lambda)_{i,l} \cdot A_{l,j} \\ &= \begin{cases} A_{i,j} & i \neq a \\ \lambda \cdot A_{i,j} & i = a \end{cases} \\ &= \left(m_a^\lambda(A)\right)_{i,j}.\end{aligned}$$

Somit ist auch $M_a^\lambda \cdot A = m_a^\lambda(A)$.

(d) Sei $B \in \mathrm{Mat}(m,k,R)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left(B \cdot S_{a,c}^\lambda\right)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} B_{i,l} \left(S_{a,c}^\lambda\right)_{l,j} \\ &= \begin{cases} B_{i,j} & j \neq a \\ B_{i,j} + \lambda \cdot B_{i,c} & j = a, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B \cdot T_{a,c})_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} B_{i,l} \cdot (T_{a,c})_{l,j} \\ &= \begin{cases} B_{i,j} & j \neq a,c \\ B_{i,c} & j = a \\ B_{i,a} & j = c, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B \cdot M_a^\lambda)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{k} B_{i,l} \cdot (M_a^\lambda)_{l,j} \\ &= \begin{cases} B_{i,j} & j \neq a \\ \lambda \cdot B_{i,j} & j = a. \end{cases}\end{aligned}$$

Multiplikation von rechts mit den Matrizen $S^{\lambda}_{a,c}$, $T_{a,c}$ und M^{λ}_{a} erwirkt also gerade die entsprechende *Spaltenoperation*, d.h., $- \cdot S^{\lambda}_{a,c}$ addiert das λ-fache der c-ten Spalte auf die a-te Spalte (beachte die vertauschten Rollen von a und c!), $- \cdot T_{a,c}$ vertauscht die a-te und c-te Spalte, und $- \cdot M^{\lambda}_{a}$ multipliziert die a-te Spalte mit λ.