Fabian Hebestreit
Julius Frank

Universität Bielefeld
Sommersemester 2024
240005 Lineare Algebra I

Lineare Algebra I

1. Klausur

31.07.2024, 08:15 in H4

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 90 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 20 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen Sie einen dokumentensicheren Stift in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift Geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2 und 3 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Für ein erfolgreiches Bestehen des Moduls ist neben dem Bestehen dieser Klausur eine erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb in diesem Semester notwendig.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Es gibt jeweils mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten. Für jede Frage erhalten Sie genau dann einen Punkt, wenn alle korrekten und keine falschen Antwortmöglichkeiten angekreuzt wurden.

(a) Zwischen welchen dieser Paare von Ringen gibt es einen Ringhomomorphismus?

- ☐ Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$.
- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}/5$.
- ☐ Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/5$.
- ☐ Von $\mathbb{Z}/5$ nach $\mathbb{Z}$.

(b) Seien $U, V \subset \mathbb{Q}^4$ Untervektorräume mit $\dim_{\mathbb{Q}}(U) = 2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V) = 3$. Welche Werte kann $\dim_{\mathbb{Q}}(U \cap V)$ annehmen?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

(c) Für welche natürliche Zahlen $n \geq 3$ und Permutationen $\sigma \in \Sigma_n$ lässt sich σ als Produkt von 3-Zykeln in Σ_n schreiben?

- ☐ Dies ist immer möglich.
- ☐ Dies ist genau dann möglich, wenn n gerade ist.
- ☐ Dies ist genau dann möglich, wenn n ungerade ist.
- ☐ Dies ist genau dann möglich, wenn σ gerade ist.

(d) Welche dieser Gleichungen gilt für jeden kommutativen Ring R, $A \in \mathrm{Mat}(n, n, R)$ und $\lambda \in R$?

- ☐ $\det(A \cdot \lambda) = \det(A)$
- ☐ $\det(A \cdot \lambda) = \det(A) \cdot \lambda^n$
- ☐ $\det(A \cdot \lambda) = \det(A) \cdot \lambda$
- ☐ $\det(A \cdot \lambda) = \det(A) \cdot (-1)^n$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Z}/5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}(A;0) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{L}(A)\big)$.

(b) Berechnen Sie $\det(B)$ und folgern Sie, dass die Spaltenvektoren von B eine nummerierte Basis b von $\mathbb{Z}/5^4$ bilden.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big)$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei K ein Körper, $1 \leq n, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(k, n, K)$ mit $A \neq 0$. Zeigen Sie folgende Formel für den Rang von A:

$$\mathrm{rk}(A) = \max\left\{ l \in \mathbb{N} \middle| \text{Es existiert eine } (l \times l)\text{-Teilmatrix } B \text{ von } A \text{ mit } \det(B) \neq 0 \right\}.$$

Dabei ist eine $(l \times l)$-Teilmatrix von A eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(l, l, K)$, die aus Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgeht, oder, etwas formaler, für die es monotone Injektionen $f\colon \{1, \dots, l\} \to \{1, \dots, k\}$, $g\colon \{1, \dots, l\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$B_{i,j} = A_{f(i), g(j)}.$$