Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Es gibt jeweils mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten. Für jede Frage erhalten Sie genau dann einen Punkt, wenn alle korrekten und keine falschen Antwortmöglichkeiten angekreuzt wurden.

(a) Zwischen welchen dieser Paare von Ringen gibt es einen Ringhomomorphismus?

- ☒ Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$.
- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}/5$.
- ☒ Von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/5$.
- ☐ Von $\mathbb{Z}/5$ nach $\mathbb{Z}$.

(b) Seien $U, V \subset \mathbb{Q}^4$ Untervektorräume mit $\dim_{\mathbb{Q}}(U) = 2$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(V) = 3$. Welche Werte kann $\dim_{\mathbb{Q}}(U \cap V)$ annehmen?

- ☐ 0
- ☒ 1
- ☒ 2
- ☐ 3

(c) Für welche natürliche Zahlen $n \geq 3$ und Permutationen $\sigma \in \Sigma_n$ lässt sich σ als Produkt von 3-Zykeln in Σ_n schreiben?

- ☐ Dies ist immer möglich.
- ☐ Dies ist genau dann möglich, wenn n gerade ist.
- ☐ Dies ist genau dann möglich, wenn n ungerade ist.
- ☒ Dies ist genau dann möglich, wenn σ gerade ist.

(d) Welche dieser Gleichungen gilt für jeden kommutativen Ring R, $A \in \mathrm{Mat}(n,n,R)$ und $\lambda \in R$?

- ☐ $\det(A\cdot\lambda) = \det(A)$
- ☒ $\det(A\cdot\lambda) = \det(A)\cdot\lambda^n$
- ☐ $\det(A\cdot\lambda) = \det(A)\cdot\lambda$
- ☐ $\det(A\cdot\lambda) = \det(A)\cdot(-1)^n$

Erklärungen:

(a) *Dass es (genau einen) Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ in jeden beliebigen Ring R gibt, war Aufgabe 1 auf Blatt 7.*

Für jeden Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Q} \to R$ gilt:

$$f(5) = f(1+1+1+1+1) = f(1)+f(1)+f(1)+f(1) = 1+1+1+1+1 = 5$$

Von Aufgabe 2 auf Blatt 6 wissen wir, dass Ringhomomorphismen Einheiten auf Einheiten schicken. Da $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ ist, muss also $5 \in R$ eine Einheit sein. Aber in $R = \mathbb{Z}/5$ ist $5 = 0$, somit kann es keinen Ringhomomorphismus $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}/5$ geben.

Umgekehrt gilt für jeden Ringhomomorphismus $g : \mathbb{Z}/5 \to R$, dass

$$0 = g(0) = g(5) = 5,$$

also muss $5 = 0$ in R sein. Da $5 \neq 0$ in $\mathbb{Z}$ ist, kann es also keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/5 \to \mathbb{Z}$ geben.

(b) *Zunächst ist $U \cap V \subseteq U$, somit ist $\dim_{\mathbb{Q}}(U\cap V) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(U) = 2$. Dass $\dim_Q(U \cap V) \neq 0$ ist, liegt daran, dass beide im gleichen vierdimensional Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ liegen. Insbesondere ist dann $U + V \subseteq \mathbb{Q}^4$, und somit $\dim_{\mathbb{Q}}(U + V) \leq 4$. Mit Aufgabe 3 von Blatt 10 ist dann*

$$\begin{aligned} 4 &\geq \dim_{\mathbb{Q}}(U+V) = \dim_{\mathbb{Q}}(U) + \dim_{\mathbb{Q}}(V) - \dim_{\mathbb{Q}}(U \cap V) \\ \Leftrightarrow 4 &\geq 2 + 3 - \dim_{\mathbb{Q}}(U \cap V) \\ \Leftrightarrow &\dim_{\mathbb{Q}}(U\cap V) \geq 1. \end{aligned}$$

Dass die Dimensionen 1 bzw. 2 tatsächlich möglich sind, sieht man bspw. mit $U = \langle e_1, e_2\rangle$, $V_1 = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$ und $V_2 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. Dann ist $U \cap V_1 = \langle e_2\rangle$ eindimensional und $U \cap V_2 = \langle e_1, e_2\rangle$ zweidimensional.

(c) *Zunachst kann erkannt werden, dass höchstens eine Antwortoption richtig ist: Die verschiedenen Optionen sagen jeweils aus, dass "$\sigma \in \Sigma_n$ lässt sich als Produkt von 3-Zykeln schreiben" äquivalent ist zu einer bestimmten Aussage über n und σ, die untereinander nicht äquivalent sind. Da laut Aufgabenstellung mindestens eine Option richtig ist, reicht es also, drei Optionen auszuschließen:*

Ein 3-Zykel $(a,b,c) \in \Sigma_n$ für verschiedene Zahlen $a,b,c \leq n$ lässt sich als Produkt von zwei 2-Zykeln (also Transpositionen) schreiben: $(a,b,c)=(a,b)\circ(b,c)$. Insbesondere haben also alle 3-Zykel positives Vorzeichen und sind somit gerade. Dann ist auch jedes Produkt von 3-Zykeln gerade. Somit lässt sich beispielsweise eine Transposition nie als Produkt von 3-Zykeln schreiben, da sie ungerade ist. Damit sind die ersten drei Optionen ausgeschlossen.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch, dass die letzte Antwortmöglichkeit tatsächlich korrekt ist. (Es war aber nicht nötig, das zu verstehen, weil ja die anderen drei Optionen ausgeschlossen wurden.) Wir zeigen per Induktion über n, dass sich jede gerade Permutation als Produkt von 3-Zykeln schreiben lässt. Für $n=3$ sind die geraden Permutationen gegeben durch $\mathrm{id},(1,2,3),(1,3,2)$. *Zwei davon sind bereits 3-Zykel, und die Identität ist ihr Produkt, da die beiden Zykel zueinander invers sind.*

Sei nun angenommen, die Aussage stimmt für ein $n \geq 3$, und betrachte $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ mit geradem Vorzeichen. Falls $\sigma(n+1)=n+1$ ist, können wir die Einschränkung von σ auf $\{1,\dots,n\}$ als Element in Σ_n betrachten und sind mit der Induktionsannahme fertig. Ansonsten sei $l=\sigma(n+1)$ und $k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{l\}$ eine beliebige weitere Zahl. Sei $\tau=(n+1,k,l)\circ\sigma$. Dann hat τ immer noch gerades Vorzeichen, und es ist

$$\tau(n+1)=(n+1,k,l)\circ\sigma(n+1)=(n+1,k,l)(l)=n+1.$$

Somit lässt sich τ nach Induktionsvoraussetzung als Produkt von 3-Zykeln schreiben, also gilt das auch für $\sigma=(l,k,n+1)\circ\tau$.

Alternativ ist auch folgender Beweis möglich: Da σ gerade ist, lässt sich σ als Produkt von gerade vielen Transpositionen schreiben. Es reicht also zu zeigen, dass jedes Produkt $(i,j)\circ(k,l)$ von zwei Transpositionen ein Produkt von 3-Zykeln ist. Dafür ist eine Fallunterscheidung nötig: Falls $\{i,j\}=\{k,l\}$ ist, sind die Transpositionen zueinander invers. Ihr Produkt ist also die Identität und somit ein (leeres) Produkt von 3-Zykeln. Falls die Transpositionen genau ein gemeinsames Element haben, ist ihr Produkt ein 3-Zykel: Für $k=i$ und $l\neq j$ ist $(i,j)\circ(i,l)=(i,l,j)$. Da $(i,j)=(j,i)$ und $(k,l)=(l,k)$ ist, deckt das bereits alle Möglichkeiten mit einem gemeinsamen Element ab. Falls die Transpositionen sich nicht überlappen, ist $(i,j)\circ(k,l)=(i,l,k)\circ(i,j,k)$.

(d) *Per Definition ist die Determinante eine multilineare Abbildung auf den Spalten von A. Insbesondere heißt das: Wenn ich* eine *Spalte von A mit λ multipliziere, multipliziert sich die Determinante auch um λ. $A\cdot\lambda$ erhält man, indem man* alle *Spalten mit λ multipliziert. Davon gibt es n viele, also multipliziert sich die Determinante um λ^n.*

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Z}/5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{L}(A;0) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{L}(A)\big)$.

(b) Berechnen Sie $\det(B)$ und folgern Sie, dass die Spaltenvektoren von B eine nummerierte Basis b von $(\mathbb{Z}/5)^4$ bilden.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Da sich der Kern einer Matrix unter elementaren Zeilenoperationen nicht verändert, bringen wir A mit dem Gauß-Algorithmus in strikte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+1\cdot I \\ III+1\cdot I \\ IV+3\cdot I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{I+1\cdot II \\ III+1\cdot II \\ IV+4\cdot II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{I\cdot 2 \\ II\cdot 3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: Z$$

Dann ist $\mathrm{Ker}\big(L(A)\big) = \mathrm{Ker}\big(L(Z)\big)$, aber da Z in strikter Zeilenstufenform ist, lässt sich der Kern ablesen: Z hat Rang 2 und die Pivot-Elemente sitzen in der ersten und zweite Spalte. Für eine Lösung x zu der Gleichung $A \cdot x = 0$ lassen sich also die Koordinaten x_3 und x_4 frei wählen und bestimmen dann x_1 und x_2 eindeutig. In anderen Worten: Es gibt eine lineare Bijektion

$$\varphi : (\mathbb{Z}/5)^2 \longrightarrow L(A;0) = \mathrm{Ker}\big(L(A)\big)$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2b \\ 4a \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot b$$

Insbesondere ist also eine Basis von $\mathrm{Ker}\big(L(A)\big)$ gegeben durch die Bilder der Einheitsvektoren von $(\mathbb{Z}/5)^2$, also

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir machen eine Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte und wenden dann zweimal die Regel von Sarrus an:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= -2 \cdot \big(4\cdot 1\cdot 4 - 4\cdot 2\cdot 4\big) + \big(1\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 2 - 1\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 1\big)$$
$$= 3\cdot(1-2) + (4+1-3-2) = 3\cdot 4 - 0 = 2$$

Da $\det(A) = 2 \neq 0$ eine Einheit in dem Körper $\mathbb{Z}/5$ ist, ist die Matrix B also invertierbar. Insbesondere sind ihre vier Spalten linear unabhängig, und als vier lineare unabhängige Vektoren in einem vierdimensionalen Vektorraum auch ein Erzeugendensystem. Somit bilden sie eine Basis.

(c) Wir können $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big)$ wie folgt als Produkt schreiben:

$$\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big) = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, e, b\big) \cdot \mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), e, e\big) \cdot \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big).$$

Dabei sind die Spalten von $\mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big)$ durch die Basisvektoren in b gegeben, also ist $\mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big) = B$. Weiterhin ist $\mathrm{M}\big(\mathrm{id}, e, b\big) = \mathrm{M}\big(\mathrm{id}, b, e\big)^{-1} = B^{-1}$. Zuletzt ist $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), e, e\big) = A$, wir haben also $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big) = B^{-1} \cdot A \cdot B$. Dafür benötigen wir lediglich noch B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II+1\cdot I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II \leftrightarrow IV}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{III+3\cdot II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{I+1\cdot III \\ II+2\cdot III \\ IV+4\cdot III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I+4\cdot IV \\ II+4\cdot IV \\ III+2\cdot IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{III\cdot 2 \\ IV\cdot 4}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big) &= B^{-1} \cdot A \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Vektoren aus b mit A multiplizieren: Die ersten beiden sind mit dem Ergebnis aus (a) gerade die Basis des Kerns von A, werden also auf 0 geschickt. Für die anderen beiden erhalten wir:

$$A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot b_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man nun erkennt (oder mit einem Gleichungssystem berechnet), dass $A \cdot b_3 = b_3 \cdot 3$ und $A \cdot b_4 = b_4 \cdot 2$ ist, sind somit alle Einträge der Darstellungsmatrix $\mathrm{M}\big(\mathrm{L}(A), b, b\big)$ bestimmt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei K ein Körper, $1 \leq n, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(k, n, K)$ mit $A \neq 0$. Zeigen Sie folgende Formel für den Rang von A:

$$\mathrm{rk}(A) = \max\left\{ l \in \mathbb{N} \middle| \text{Es existiert eine } (l \times l)\text{-Teilmatrix } B \text{ von } A \text{ mit } \det(B) \neq 0 \right\}.$$

Dabei ist eine $(l \times l)$-Teilmatrix von A eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(l, l, K)$, die aus Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgeht, oder, etwas formaler, für die es monotone Injektionen $f\colon \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, k\}$, $g\colon \{1, \ldots, l\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt mit

$$B_{i,j} = A_{f(i),g(j)}.$$

Lösungsvorschlag

Es gibt viele Möglichkeiten, das zu beweisen. Hier sind drei verschiedene. Wir benennen das Maximum auf der rechten Seite mit $m(A) \in \mathbb{N}$.

1. Die folgende ist wohl die einfachste Lösung: Wir zeigen, dass sowohl $\mathrm{rk}(A) \geq m(A)$ als auch $\mathrm{rk}(A) \leq m(A)$ gelten.

   Dass $\mathrm{rk}(A) \geq m(A)$ gilt ist ganz einfach (hätte aber schon die Hälfte der Punkte gegeben): Sei etwa B eine $(m \times m)$-Teilmatrix von A mit $\det(B) \neq 0$ (so etwas gibt es nach Definition von m). Dann ist B nach dem wohl wichtigsten Satz über Determinanten aus der Vorlesung invertierbar. Das wiederum ist äquivalent dazu, dass die Spalten von B linear unabhängig sind. Offenbar sind dann aber auch die zugehörigen Spalten von A (formal sind das die Spalten $A_{g(1)}, \ldots A_{g(m)}$) linear unabhängig. Da der Rang r von A die Dimension des Bildes von A ist, also des von den Spalten von A aufgespannten Unterraumes von K^k, folgt dann dass $\mathrm{rk}(A) \geq m(A)$ sein muss.

   Dass auch $m \geq \mathrm{rk}(A)$ gilt, ist ein klein wenig aufwendiger: Nach Definition des Ranges gibt es eine Ansammlung von $\mathrm{rk}(A)$ linear unabhängigen Spalten in A. Sei $C \in \mathrm{Mat}(k, r, K)$ die Matrix die aus A entsteht, indem man alle Spalten außerhalb irgendeiner solchen Ansammlung streicht. Dann hat C offenbar immer noch $\mathrm{rk}(A)$ linear unabhängige Spalten, also $\mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(A)$ durch Betrachtung des Spaltenrangs. Aber da Spaltenrang und Zeilenrang immer gleich sind, folgt auch, dass C eine Ansammlung von $\mathrm{rk}(A)$ linear unabhängigen Zeilen besitzt. Sei $B \in \mathrm{Mat}(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(A), K)$ die aus C durch Streichen aller Zeilen außerhalb einer solchen Ansammlung entsteht. Dann hat wieder B noch $\mathrm{rk}(A)$ linear unabhängige Zeilen, ist also invertierbar. Und invertierbare Matrizen haben invertierbare Determinante. Wir haben also eine $(\mathrm{rk}(A) \times \mathrm{rk}(A))$-Teilmatrix von A mit nicht-verschwindender Determinante konstruiert, was sicherlich $m(A) \geq \mathrm{rk}(A)$ impliziert.

2. Die folgende ist eine Variation dieses Ansatzes: Wieder zeigt man, dass sowohl $\mathrm{rk}(A) \geq m(A)$ als auch $\mathrm{rk}(A) \leq m(A)$, und die erste der beiden Ungleichungen wird wohl nicht besser als in der ersten Lösung.

   Da Zeilenrang und Spaltenrang übereinstimmen, wählen wir uns $\mathrm{rk}(A)$ viele linear unabhängige Zeilen von A und $\mathrm{rk}(A)$ viele linear unabhängige Spalten von A und bezeichnen mit B die Matrix, die durch Streichen aller anderen Zeilen und Spalten entsteht. Da die gewählten $\mathrm{rk}(A)$ Spalten von A eine Basis des Bildes von L(A) bilden, können wir insbesondere alle anderen Spalten von A als Linearkombination dieser geschrieben werden. Ist nun C die Matrix die durch Streichen der nicht ausgewählten Zeilen aus A entsteht, so hat C genau $\mathrm{rk}(A)$ viele Zeilen und sie sind alle linear unabhängig, also sicher $\mathrm{Rang}(C) = \mathrm{Rang}(A)$. Und es gilt offenbar immer noch, dass sich jede Spalte von C als Linearkombination der gewählten Spalten schreiben lässt. Diese bilden also immer noch ein Erzeugendensystem der Zeilen und sind dann wegen des Übereinstimmens von Zeilenrang und Spaltenrang notwendigerweise linear unabhängig. Streichen wir nun die übrigen Spalten von C erhalten wir B und wissen, dass alle Spalten von B linear unabhängig sind. Also $\det(B) \neq 0$ und damit $m(A) \geq \mathrm{rk}(A)$.

3. Die dritte Lösung ist in gewisserweise die elementarste, aber auch aufwändigste. Wir beobachten zunächst, dass die Behauptung korrekt ist, falls A strikte Zeilenstufenform hat (wieder konnte man hierfür schon die Hälfte der Punkte erhalten): Es sind dann genau die ersten $\mathrm{rk}(A)$ Zeilen von A keine Nullzeilen. Eine $l \times l$-Teilmatrix B von A muss also eine Nullzeile haben, sobald $l > \mathrm{rk}(A)$ gilt, und dann ist sicherlich $\det(B) = 0$. Das impliziert $m(A) \leq \mathrm{rk}(A)$. Auf der anderen Seite ist die Teilmatrix $B \in \mathrm{Mat}(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(A), K)$ von A, die

aus den ersten $\mathrm{rk}(A)$ Zeilen und den Pivotspalten von A (hiervon gibt es natürlich dann auch genau $\mathrm{rk}(A)$ Stück) gebildet wird, eine Diagonalmatrix mit nicht-verschwindenden Diagonaleinträgen (per Definition von strikter Zeilenstufenform). Aber für solches B ist die Determinante einfach das Produkt der Diagonaleinträge, und weil Körper keine Nullteiler enthalten, verschwindet dies für B dann ebenfalls nicht. Also muss auch $m(A) \geq \mathrm{rk}(A)$ gelten und damit $m(A) = \mathrm{rk}(A)$ wie behauptet.

Nun überlegen wir uns, dass beide Seiten der zu zeigenden Gleichung sich nicht verändern, wenn man A durch elementare Zeilenoperationen vom Typ I und III manipuliert (!). Durch den Gauß-Algorithmus kann A mit solchen Operationen schließlich in Zeilenstufenform überführt werden, was dann den Beweis beendet. Dass der Rang von A sich hierbei nicht verändert, war ein Satz aus der Vorlesung, wir müssen uns also nur die rechte Seite anschauen. Und nach eine Vorbemerkung: Natürlich reicht es $m(A') \geq m(A)$ zu zeigen, wenn A' aus A durch solche Operationen entsteht, da dann auch A durch A' durch solche Operationen entsteht und $m(A) \geq m(A')$ folgt. Nun zum eigentlichen:

Für Operationen vom Typ III: Entstehe also A' aus A durch Vertauschen der $i$ten und der $j$ten Zeilen und sei B eine $m(A) \times m(A)$-Teilmatrix von A mit $\det(B) \neq 0$. Liegen beide Zeilen außerhalb von B, so ist B auch eine Teilmatrix von A', was sicherlich $m(A') \geq m(A)$ impliziert. Liegen beide in B, so ist der Effekt auf B natürlich auch, dass einfach zwei Zeilen vertauscht werden. Bezeichnen wir die entstehende Teilmatrix von A' mit B' haben wir $\det(B') = -\det(B) \neq 0$. Damit folgt wieder $m(A') \geq m(A)$. Liegt zuletzt genau eine Zeile in B, etwa die j-te, so sei B' diejenige Teilmatrix von A' die aus A' entsteht indem wir die gleichen Spalten und Zeilen streichen, die von A zu B führen, bis darauf, dass wir anstatt der i-ten die j-te Spalte streichen. Dann entsteht B' aus B wieder durch vertauschen zweier Zeilen, und damit gilt $\det(B') = -\det(B)$, was wie oben die Konklusio liefert.

Der Fall von Operationen vom Typ I geht vollständig analog: Entstehe also A' aus A durch Addition eines Vielfachen der i-ten Zeile auf die j-te und sei B eine $m(A) \times m(A)$-Teilmatrix von A mit $\det(B) \neq 0$. Ist dann die j-Zeile von A nicht in B, so ist B eine Teilmatrix von A'. Sind beide Zeilen in A, so entsteht die zu B analoge Teilmatrix B' von A' durch eine elementare Zeilenoperation vom Typ II auf B, was $\det(B') = \det(B) \neq 0$ impliziert. Und liegt nur die j-te Zeile in B, und die zu B analoge Teilmatrix B' von A' erfüllt nicht $\det(B') \neq 0$, so muss diejenige Zeile von B' die sich verändert hat, von den anderen Zeilen von B' linear abhängig sein und diese stimmen mit denen von B überein. Aber dann hat die diejenige Teilmatrix B'' von A, die aus A entsteht indem wir die gleichen Spalten und Zeilen streichen, die von A zu B führen, bis darauf, dass wir anstatt der i-ten die j-te Spalte streichen, linear unabhängige Spalten und damit $\det(B'') \neq 0$. Und B'' ist auch eine Teilmatrix von A', sodass in jedem Fall $m(A') \geq m(A)$ folgt.