Fabian Hebestreit
Julius Frank

Universität Bielefeld
Sommersemester 2024
240005 Lineare Algebra I

Lineare Algebra I

2. Klausur

17.09.2024, 08:00 in H4

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	Σ	Note

- **Dauer der Klausur:** 120 Minuten
- **Maximale Punktzahl:** 24 Punkte
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Handbeschriebene DIN-A4 Blätter, sonst nichts.
- Benutzen Sie einen dokumentensicheren Stift in einer Farbe außer rot. Mit Bleistift Geschriebenes wird nicht gewertet.
- Bitte geben Sie bei den Aufgaben 2,3 und 4 alle Zwischenschritte und Begründungen zu Ihren Lösungen an.
- Von den Aufgaben 4.1 und 4.2 wird *nur eine* gewertet.
- Für ein erfolgreiches Bestehen des Moduls ist neben dem Bestehen dieser Klausur eine erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb in diesem Semester notwendig.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Es gibt jeweils mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten. Für jede Frage erhalten Sie genau dann einen Punkt, wenn alle korrekten und keine falschen Antwortmöglichkeiten angekreuzt wurden.

(a) Zwischen welchen dieser Paare von Ringen gibt es einen Ringhomomorphismus?

- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}/3$.
- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$.
- ☐ Von $\mathbb{Z}/3$ nach $\mathbb{Z}/7$.
- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$.

(b) Sei R ein Ring und $A \in \mathrm{Mat}(n,n,R)$ eine invertierbare Matrix. Dann bilden die Spalten von A eine nummerierte Basis a von R^n. Sei weiter e die Standardbasis von R^n. Es gilt dann:

- ☐ $A = M(L(A), e, e)$
- ☐ $A = M(L(A), a, e)$
- ☐ $A = M(L(A), e, a)$
- ☐ $A = M(L(A), a, a)$

(c) Sei $3 \leq k \leq n$. Für jeden Zykel $(a_1, \dots, a_k) \in \Sigma_n$ gilt:

- ☐ $(a_1, \dots, a_k) = (a_k, \dots, a_1)$.
- ☐ $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_k)^{-1}$.
- ☐ $(a_1, \dots, a_k) = (a_2, \dots, a_k, a_1)$.
- ☐ $(a_1, \dots, a_k) = (a_k, \dots, a_1)^{-1}$.

(d) Für alle Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{Z})$, die invertierbar über $\mathbb{Z}$ sind, gilt:

- ☐ Mindestens ein Eintrag ist eine Einheit in $\mathbb{Z}$.
- ☐ $ad - bc \in \{-1, 1\}$.
- ☐ A ist invertierbar über $\mathbb{Z}/p$ für alle Primzahlen p.
- ☐ Mindestens ein Eintrag ist negativ.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Wir definieren die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass a und b linear unabhängig sind und finden Sie einen Vektor $d \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^3$ derart, dass $\{a, b, d\}$ eine Basis von $\left(\mathbb{Z}/5\right)^3$ bildet.

(b) Wie viele lineare Abbildungen $f : \left(\mathbb{Z}/5\right)^3 \to \left(\mathbb{Z}/5\right)^2$ gibt es derart, dass

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f(b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist?

(c) Gibt es eine solche Abbildung, für die zusätzlich

$$f(c) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt?

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Für $t \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Vektoren

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix}, v_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3(t) = \begin{pmatrix} t-8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

(a) Sei $A(t) \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Q})$ die Matrix, deren Spaltenvektoren durch $v_1(t)$, $v_2(t)$ und $v_3(t)$ gegeben sind. Bestimmen Sie $\det(A(t))$.

Hinweis: Die Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, t \mapsto \det(A(t))$ ist ein quadratisches Polynom, mit anderen Worten es gibt $a, b, c \in \mathbb{Q}$ derart, dass $\det(A(t)) = at^2 + bt + c$ für alle $t \in \mathbb{Q}$ gilt. Es hat genau -1 und 1 als Nullstellen.

(b) Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie für die übrigen $t \in \mathbb{Q}$ eine Basis des Unterraums $U = \langle v_1(t), v_2(t), v_3(t) \rangle \subseteq \mathbb{Q}^3$.

Von den folgenden beiden Aufgaben wird *nur eine* gewertet.

In beiden Aufgaben bezeichnet φ^k die k-fache Verkettung von φ mit sich selber, d.h., $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ mal}}$.

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige: Falls es ein $m > 0$ gibt, sodass $\varphi^m = 0$ ist, so ist auch $\varphi^n = 0$.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist eine Induktion über n, für den Induktionsschritt hilft es dann, das Bild $\mathrm{Im}(\varphi)$ zu betrachten.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Sei weiterhin $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Falls für alle $1 \leq i \leq n$ gilt, dass

$$\varphi(b_i) \in \langle b_1, \ldots, b_{i-1} \rangle,$$

so ist $\varphi^n = 0$.

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h., $A_{i,j} = 0$ für $i > j$. Folgern Sie: Es ist $A^n = 0$ genau dann, wenn alle Diagonaleinträge von A verschwinden (also wenn $A_{i,i} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$).