Aufgabe 1

Kreuzen Sie zu jeder Frage *alle* richtigen Antwortmöglichkeiten an. Es gibt jeweils mindestens eine und höchstens drei korrekte Antwortmöglichkeiten. Für jede Frage erhalten Sie genau dann einen Punkt, wenn alle korrekten und keine falschen Antwortmöglichkeiten angekreuzt wurden.

(a) Zwischen welchen dieser Paare von Ringen gibt es einen Ringhomomorphismus?

- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}/3$.
- ☐ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$.
- ☐ Von $\mathbb{Z}/3$ nach $\mathbb{Z}/7$.
- ☒ Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$.

(b) Sei R ein Ring und $A \in \mathrm{Mat}(n,n,R)$ eine invertierbare Matrix. Dann bilden die Spalten von A eine nummerierte Basis a. Sei e die Standardbasis von R^n. Es gilt:

- ☒ $A = M(L(A),e,e)$
- ☐ $A = M(L(A),a,e)$
- ☐ $A = M(L(A),e,a)$
- ☒ $A = M(L(A),a,a)$

(c) Sei $3 \le k \le n$. Für jeden Zykel $(a_1,\dots,a_k) \in \Sigma_n$ gilt:

- ☐ $(a_1,\dots,a_k) = (a_k,\dots,a_1)$.
- ☐ $(a_1,\dots,a_k) = (a_1,\dots,a_k)^{-1}$.
- ☒ $(a_1,\dots,a_k) = (a_2,\dots,a_k,a_1)$.
- ☒ $(a_1,\dots,a_k) = (a_k,\dots,a_1)^{-1}$.

(d) Für alle Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}(2,2,\mathbb{Z})$, die invertierbar über $\mathbb{Z}$ sind, gilt:

- ☐ Mindestens ein Eintrag ist eine Einheit in $\mathbb{Z}$.
- ☒ $ad - bc \in \{-1,1\}$.
- ☒ A ist invertierbar über $\mathbb{Z}/p$ für alle Primzahlen p.
- ☐ Mindestens ein Eintrag ist negativ.

Erklärungen:

(a) *Für die Ringhomomorphismen von $\mathbb{Q}$ ist das Argument das selbe wie in der ersten Klausur: Wir wissen von Blatt 6, Aufgabe 2, dass Ringhomomorphismen (multiplikative) Einheiten auf Einheiten schicken. Insbesondere kann es also keine Homomorphismen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}/3$ und $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ geben: Bspw. ist $3 \in \mathbb{Q}$ eine Einheit (da $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ ist), aber $f(3) = 0 \in \mathbb{Z}/3$ und $g(3) = 3 \in \mathbb{Z}$ sind jeweils nicht invertierbar.*

Ein Ringhomomorphismus $h : \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{Z}/7$ müsste einerseits $h(0) = 0$erfüllen, andererseits gilt aber $h(0) = h(3) = h(1) + h(1) + h(1) = 1 + 1 + 1 = 3$. Da in $\mathbb{Z}/7$ aber $0 \neq 3$ ist, kann es somit keinen Ringhomomorphismus geben.

Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, nämlich die Identität.

(b) *Dass $A = M(L(A),e,e)$ ist, gilt direkt mit der Definition von $L(A)$, oder mit Beispiel III.7.6(1) im Skript.*

Für die übrigen Gleichungen benutzen wir die Formel aus Definition 7.7 im Skript. Für nummerierte Basen b, b' seien B, B' die Matrizen, deren Spaltenvektoren durch b bzw. b' gegeben sind. Dann gilt folgendes:

$$M(L(A),b,b') = M(\mathrm{id},e,b') \cdot M(L(A),e,e) \cdot M(\mathrm{id},b,e) = (B')^{-1} \cdot A \cdot B.$$

Insbesondere gilt also:

$$M(L(A),a,e) = \mathbb{1}^{-1} \cdot A \cdot A = A^2,$$
$$M(L(A),e,a) = \mathbb{A}^{-1} \cdot A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1},$$
$$M(L(A),a,a) = A^{-1} \cdot A \cdot A = A.$$

(c) *Die korrekten Gleichungen sind Beispiel IV.2.2 im Skript.*

Dass im Allgemeinen $(a_1,\dots,a_k) \neq (a_k,\dots,a_1)$, sieht man bspw. an $\sigma = (1,2,3)$ und $\sigma' = (3,2,1)$ in Σ_3: Dann ist $\sigma(1) = 2$, aber $\sigma'(1) = 3$.

Ähnlich sieht man, dass im Allgemeinen $(a_1,\dots,a_k) \neq (a_1,\dots,a_k)^{-1}$ ist: Mit $\sigma = (1,2,3) \in \Sigma_3$ ist wieder $\sigma(1) = 2$, also $\sigma^{-1}(2) = 1$. Mit $\sigma(2) = 3$ ist somit $\sigma \neq \sigma^{-1}$.

(d) *$ad-bc$ ist gerade die Determinante von A. Dann ist mit Satz IV.4.2 A genau dann invertierbar, wenn* $\det(A) \in \mathbb{Z}$ *eine Einheit ist, und die Einheiten in* $\mathbb{Z}$ *sind genau* $\{\pm 1\}$ *(siehe Korollar II.3.17).*

Sei nun A über $\mathbb{Z}$ *invertierbar, also* $ad-bc \in \{\pm 1\}$. *Dann ist für jede Primzahl* p *auch* $\det(A) \in \{\pm 1\}$ *in* $\mathbb{Z}/p$ *eine Einheit, also ist A auch in* $\mathbb{Z}/p$ *invertierbar.* [1]

Dass nicht mindestens ein Eintrag negativ sein muss, wird bereits von der Einheitsmatrix gezeigt. Um zu zeigen, dass kein Eintrag eine Einheit sein muss, müssen wir $a, b, c, d \neq \pm 1$ *finden, sodass* $ad-bc = \pm 1$ *ist: Ein Beispiel ist:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 9-8 = 1 \text{ und } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

[1] Das funktioniert übrigens auch umgekehrt: Wenn für jedes p A über $\mathbb{Z}/p$ invertierbar ist, so muss die Determinante $ad-bc$ für jedes p in $\mathbb{Z}/p$ eine Einheit sein: In anderen Worten muss $ad-bc \neq 0$ modulo p sein, also wird $ad-bc \in \mathbb{Z}$ von keiner Primzahl geteilt: Das gilt aber ausschließlich für 1 und -1, somit ist A über $\mathbb{Z}$ invertierbar.

Aufgabe 2

Wir definieren die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass a und b linear unabhängig sind und finden Sie einen Vektor $d \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^3$ derart, dass $\{a, b, d\}$ eine Basis von $\left(\mathbb{Z}/5\right)^3$ bildet.

(b) Wie viele lineare Abbildungen $f : \left(\mathbb{Z}/5\right)^3 \to \left(\mathbb{Z}/5\right)^2$ gibt es derart, dass

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } f(b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist?

(c) Gibt es eine solche Abbildung, für die zusätzlich

$$f(c) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt?

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt viele Arten zu sehen, dass a und b linear unabhängig sind:

- Der mechanischste Weg ist es, das Gleichungssystem $a \cdot x + b \cdot y = 0$ für $x, y \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^3$ zu betrachten: Um dieses zu lösen, bringen wir die Matrix A, deren zwei Spalten aus a und b bestehen, in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-2I \\ III+1I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Da die resultierende Matrix in jeder Spalte ein Pivot-Element hat, besitzt das Gleichungssystem also eine eindeutige Lösung, nämlich $x = y = 0$: Somit sind a und b linear unabhängig.

- Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn einer ein Vielfaches des anderen ist. Da aber die Einträge in der letzten Koordinate übereinstimmen, müsste aus $a = b \cdot \lambda$ oder $b = a \cdot \lambda$ schon folgen, dass $\lambda = 1$ ist. Das ist aber falsch, da die Vektoren nicht gleich sind.

- Es sind bereits die Vektoren $a', b' \in \left(\mathbb{Z}/5\right)^2$ linear unabhängig, die wir erhalten, wenn wir die erste Koordinate aus a bzw. b streichen. Das kann man sehen, indem man die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

  betrachtet. Diese ist eine Einheit, also sind die Spalten eine Basis und somit insbesondere linear unabhängig. Dann sind auch die größeren Vektoren a und b linear unabhängig. (Achtung: Falls man die letzte Koordinate streicht, erhält man linear abhängige Vektoren—das bedeutet aber nicht, dass a und b linear abhängig sind!)

- Wir können auch diesen Schritt komplett überspringen, direkt einen Vektor d raten, und zeigen, dass $\{a, b, d\}$ eine Basis ist: Daraus folgt bereits, dass $\{a, b\}$ linear unabhängig sind.

Es gibt nun viele Wahlen für ein d, sodass $\{a, b, d\}$ linear unabhängig sind (genau $5^3 - 5^2 = 100!$). Insbesondere muss mindestens ein Einheitsvektor funktionieren (das ist eine Konsequenz aus dem Steinitz'schen Ergänzungssatz, im Skript Satz III.5.10). Hier ist bspw. mit $d = e_1$ die Menge $\{a, b, d\}$ eine Basis. Das kann wie oben auf viele Arten überprüft werden, wir berechnen hier die Determinante der Matrix, deren Spalten durch a, b und e_1 gegeben sind. Dafür benutzen wir einmal die Laplace-Entwicklung auf der letzten Spalte:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

(b) Eine zentrale Eigenschaft von Basen ist, dass man auf ihnen lineare Abbildungen definieren kann (vgl. III.4.10): In unserem Fall heißt das, dass eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}/5)^3 \to (\mathbb{Z}/5)^2$ bereits durch die Werte auf der Basis $\{a, b, d\}$, also $f(a), f(b), f(d) \in (\mathbb{Z}/5)^2$ vorgegeben ist, und umgekehrt für jede Wahl dieser Werte genau eine lineare Abbildung existiert.

Wenn also bereits $f(a)$ und $f(b)$ festgelegt sind, können wir nun noch $f(d) \in (\mathbb{Z}/5)^2$ frei wählen: Dafür gibt es genau $5^2 = 25$ Möglichkeiten, also gibt es auch 25 solche Abbildungen.

Leicht umformuliert können wir auch die möglichen Darstellungsmatrizen zählen: Sei β die nummerierte Basis $\beta = (a, b, d)$, und für ein $f : (\mathbb{Z}/5)^3 \to (\mathbb{Z}/5)^2$ $D_f = M(f, \beta, e) \in \mathrm{Mat}(2, 3, \mathbb{Z}/5)$ die dazugehörige Darstellungsmatrix. Dann sind die Spalten von D_f gegeben durch die Bilder $f(a)$, $f(b)$, $f(d)$, also ist mit den vorgegebenen Werten und mit $f(d) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$D_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & y \end{pmatrix}.$$

Für jede Wahl von $x, y \in \mathbb{Z}/5$ existiert nun also genau eine Matrix, also genau eine lineare Abbildung, die die Bedingung erfüllt, und es gibt $5 \cdot 5 = 25$ solche Wahlen.

(c) Hier ist der erste Schritt, c in der Basis $\{a, b, d\}$ darzustellen. Falls man nicht sofort erkennt, dass $c = a + b$ ist, lässt sich das mit einem Gleichungssystem herausfinden

- Der schnelle Weg ist es, zu erkennen, dass $c = a + b$ ist. Somit ist für jedes lineare f auch

  $$f(c) = f(a) + f(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Somit kann es keine solche Abbildung geben.

- Kanonischer können wir c in unserer Basis $\{a, b, d\}$ darstellen, indem wir das Gleichungssystem $a \cdot x + b \cdot y + d \cdot z = d$ für $x, y, z \in \mathbb{Z}/5$ lösen—das Ergebnis ist $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, dann ist das Argument dasselbe wie oben.

In jedem Fall ist die Antwort: Es gibt keine solche Abbildung.

Aufgabe 3

Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ definieren wir die Vektoren

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix}, v_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3(t) = \begin{pmatrix} t-8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

(a) Sei $A(t) \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{Q})$ die Matrix, deren Spaltenvektoren durch $v_1(t)$, $v_2(t)$ und $v_3(t)$ gegeben sind. Bestimmen Sie $\det\big(A(t)\big)$.

Hinweis: Die Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, t \mapsto \det\big(A(t)\big)$ ist ein quadratisches Polynom, mit anderen Worten es gibt $a, b, c \in \mathbb{Q}$ derart, dass $\det\big(A(t)\big) = at^2 + bt + c$ für alle $t \in \mathbb{Q}$ gilt. Es hat genau -1 und 1 als Nullstellen.

(b) Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie für die übrigen $t \in \mathbb{Q}$ eine Basis des Unterraums $U = \langle v_1(1), v_2(1), v_3(1)\rangle \subseteq \mathbb{Q}^3$.

Lösungsvorschlag:

(a) Alle Möglichkeiten zur Berechnung der Determinante sind erlaubt. Wir wählen eine Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} -6 & 3 & t-8 \\ 2 & -1 & 3 \\ t-1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= (t-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & t-8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (t-1)\cdot\big(9-(t-8)\cdot(-1)\big) + 2\cdot(6-6) \\ &= (t-1)\cdot(t+1) = t^2-1\end{aligned}$$

(b) Zunächst bemerken wir, dass die Menge $B = \{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \subset \mathbb{Q}^3$ genau dann eine Basis ist, wenn die Matrix $A(t)$ invertierbar ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $\det\big(A(t)\big) \in \mathbb{Q}$ eine Einheit (also nicht 0) ist.

In (a) haben wir bereits gesehen, dass $\det\big(A(t)\big) = t^2 - 1 = (t-1)\cdot(t+1)$ ist. Damit wissen wir, dass es genau zwei Nullstellen hat, nämlich $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$. (Alternativ sind die Nullstellen im Hinweis gegeben, es lässt sich also direkt überprüfen, dass sie auch tatsächlich welche sind.)

Somit ist $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$ eine Basis genau dann, wenn $t \in \mathbb{Q}\setminus\{\pm 1\}$ ist.

(c) Übrig bleiben $t_1 = 1$ und $t_2 = -1$: Für $t_1 = 1$ ist

$$v_1(1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3(1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus (b) wissen wir, dass die drei Vektoren keine Basis von $\mathbb{Q}^3$ bilden, also hat $U = \langle v_1(1), v_2(1), v_3(1)\rangle$ höchstens Dimension 2. Es lässt sich aber bspw. erkennen, dass $v_2(1)$ und $v_3(1)$ linear unabhängig sind: Für $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $v_2(1)\cdot x + v_3(1)\cdot y = 0$ gilt insbesondere mit der letzten Koordinate $0\cdot x + 2\cdot y = 0$, also $y = 0$, und somit mit der ersten Koordinate $3\cdot x - 7\cdot 0 = 0$, also auch $x = 0$.

Somit bilden $v_2(1)$ und $v_3(1)$ als maximal linear unabhängige Teilmenge eine Basis des Untervektorraums U.

Genauso ist für $t_2 = -1$:

$$v_1(-1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3(-1) = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann sind mit dem gleichen Argument $v_2(-1)$ und $v_3(-1)$ linear unabhängig, also eine Basis des Untervektorraums U.

In beiden Aufgaben bezeichnet φ^k die k-fache Verkettung von φ mit sich selber, d.h., $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ mal}}$.

Aufgabe 4.1

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige: Falls es ein $m > 0$ gibt, sodass $\varphi^m = 0$ ist, so ist auch $\varphi^n = 0$.

Hinweis: Ein möglicher Ansatz ist eine Induktion über n, für den Induktionsschritt hilft es dann, das Bild $\operatorname{Im}(\varphi)$ zu betrachten.

Lösungsvorschlag:

Zunächst weisen wir darauf hin, dass hier $n = \dim(V)$ ist: Es ist nicht korrekt, dass, falls φ^m für ein bestimmtes $m > 0$ ist, auch $\varphi^k = 0$ für *alle* k gilt. Beispielsweise gilt für $V = K^2$ mit $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_1$, dass $\varphi^1 \neq 0$, aber $\varphi^2 = 0$ ist. Weiterhin sei bemerkt, dass die Aussage auch für $n = 0$ Sinn ergibt, wobei $\varphi^0 = \mathrm{id}_V$ ist.

Wir beweisen die Aussage mit Induktion über $n = \dim(V)$:

Für $n = 0$ ist $V = \{0\}$, also gilt für jedes φ, dass $\varphi^0 = \mathrm{id}_V = 0$ ist.

Alternativ wäre auch ein Induktionsanfang bei $n = 1$ in Ordnung gewesen: Sei $\dim(V) = 1$ und $\varphi^m = 0$ für ein $\varphi : V \to V$ und $m > 0$. Für eine (einelementige) Basis $B = \{v\}$ gibt es ein $\lambda \in K$, sodass $\varphi(v) = v \cdot \lambda$ ist. Dann ist $\varphi^m(v) = v \cdot (\lambda^m) = 0$, also muss bereits $\lambda^m = 0$ sein. Da K als Körper keine Nullteiler besitzt, folgt bereits, dass $\lambda = 0$ ist. Somit ist $\varphi(v) = 0$, und daher $\varphi^1 = \varphi = 0$.

Sei nun angenommen, dass die Aussage für alle $n' \leq n \in \mathbb{N}$ stimmt, und V ein Vektorraum von Dimension $n + 1$, sowie $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi^m = 0$ für ein $m > 0$. Wir bemerken zunächst, dass wir φ einschränken können zu einer linearen Abbildung auf dem Unterraum $\operatorname{Im}(\varphi)$, d.h., wir betrachten $\varphi' : \operatorname{Im}(\varphi) \to \operatorname{Im}(\varphi)$. Nun behaupten wir, dass φ nicht surjektiv sein kann: Ansonsten wäre auch die Verkettung φ^m surjektiv, aber da $\varphi^m = 0$ und $\dim(V) > 0$ ist, kann das nicht der Fall sein. Somit ist $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) < \dim(V) = n + 1$, also können wir die Induktionsvoraussetzung auf φ' anwenden, es gilt also, da $(\varphi')^m = 0$ ist,

$$(\varphi')^{\dim(\operatorname{Im}(V))} = 0,$$

und somit auch $(\varphi')^n = 0$. Nun ist für jedes $v \in V$ $\varphi(v) \in \operatorname{Im}(\varphi)$, also ist

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi^n\big(\varphi(v)\big) = (\varphi')^n(\varphi(v)) = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\varphi^{n+1} = 0$ ist.

Aufgabe 4.2

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein K-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Sei weiterhin $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Falls für alle $1 \le i \le n$ gilt, dass

$$\varphi(b_i) \in \langle b_1, \dots, b_{i-1} \rangle,$$

so ist $\varphi^n = 0$.

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h., $A_{i,j} = 0$ für $i > j$. Folgern Sie: Es ist $A^n = 0$ genau dann, wenn alle Diagonaleinträge von A verschwinden (also wenn $A_{i,i} = 0$ für alle $1 \le i \le n$).

Lösungsvorschlag:

Wie bei 4.1 sei zunächst darauf hingewiesen, dass $n = \dim(V)$ ist.

(a) Auch hier funktioniert eine Induktion über n:

Sei $n = 0$, dann ist $V = \{0\}$ und für jedes $\varphi : V \to V$ gilt, dass $\varphi^0 = \mathrm{id}_0 = 0$ ist.

Wieder ist ein Induktionsanfang bei $n = 1$ möglich und vielleicht weniger verwirrend: Dann ist die Basis $\{b_1\}$, und die Bedingung besagt, dass $\varphi(b_1) \in \langle \emptyset \rangle = 0$ ist, also ist $\varphi(b_1) = 0$, und somit $\varphi^1 = \varphi = 0$.

Sei nun angenommen, dass die Aussage für ein $n \ge 0$ gilt. Für einen $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum V mit Basis $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ sei $\varphi : V \to V$ linear mit $\varphi(b_i) \in \langle b_1, \cdots, b_{i-1} \rangle$ für alle $1 \le i \le n+1$. Wir betrachten dann die Einschränkung

$$\varphi' : \langle b_1, \dots, b_n \rangle \to \langle b_1, \dots, b_n \rangle.$$

Es gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $(\varphi')^n = 0$ ist. Für jedes $v \in V$ ist $\varphi(v) \in \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, da das für jedes b_i gilt. Also ist

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi^n\big(\varphi(v)\big) = (\varphi')^n(\varphi(v)) = 0.$$

(b) Wir beobachten zunächst, dass A eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann, wenn für alle j die j-te Spalte von A eine Linearkombination von $e_1, \dots, e_j$ ist, also wenn

$$\big(L(A)\big)(e_j) \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$$

ist. Genauso ist A eine obere Dreiecksmatrix mit verschwindenden Diagonaleinträgen genau dann, wenn für alle j die j-te Spalte von A eine Linearkombination von $e_1, \dots, e_{j-1}$ ist, also wenn

$$\big(L(A)\big)(e_j) \in \langle e_1, \dots, e_{j-1} \rangle$$

ist—das ist genau die Bedingung aus (a). Insbesondere folgt mit (a) dann, dass für eine Diagonalmatrix A, deren Diagonaleinträge verschwinden, $\big(L(A)\big)^n = 0$ und somit $A^n = 0$ ist.

Für die andere Richtung machen wir zunächst die folgende Beobachtung, die wir für die Zukunft als Lemma festhalten (die Aussagen hätten auch ohne Beweis verwendet werden dürfen):

Lemma 0.1. *Seien A, B obere Dreiecksmatrizen.*

(i) Dann ist auch $A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix.

(ii) Die Diagonaleinträge von $A \cdot B$ sind gegeben durch die Produkte der Diagonaleinträge, also:

$$(A \cdot B)_{i,i} = A_{i,i} \cdot B_{i,i}.$$

Proof. (i) Das folgt direkt aus der obigen Charakterisierung von Dreiecksmatrizen: Da $B \cdot e_j \in \langle e_1, \dots, e_j \rangle$ ist, gibt es λ_i mit $B \cdot e_j = e_1 \cdot \lambda_1 + \cdots e_j \cdot \lambda j$. Da auch für alle $i \le j$

$$A \cdot e_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle \subseteq \langle e_1, \dots, e_j \rangle$$

ist, gilt also

$$(A\cdot B)(e_j) = A\cdot\bigl(e_1\cdot\lambda_1+\cdots e_j\cdot\lambda j\bigr) = (A\cdot e_1)\cdot\lambda_1+\cdots+(A\cdot e_j)\cdot\lambda_j\in\langle e_1,\dots,e_j\rangle,$$

somit ist $A\cdot B$ eine Dreiecksmatrix. (Natürlich ist auch ein direkter Beweis über die Einträge möglich.)

(ii) Es ist

$$(A\cdot B)_{i,i} = \sum_{1\le k\le n}\underbrace{A_{i,k}}_{=0\text{ für }i>k}\cdot\underbrace{B_{k,i}}_{=0\text{ für }k>i} = A_{i,i}\cdot B_{i,i}.$$

□

Insbesondere ist also A^n eine obere Dreiecksmatrix und $(A^n)_{i,i} = (A_{i,i})^n$ für alle i.

Sei nun endlich A eine obere Dreiecksmatrix, für die $A^n = 0$ gilt. Dann gilt mit obiger Beobachtung insbesondere $(A_{i,i})^n = 0$, also auch $A_{i,i} = 0$.