Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Kreuze zu jeder Frage alle richtigen Antworten an.

(a) Für jeden kommutativen Ring R und Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n,R)$ gilt:

- ☐ $\det(0) = 0$
- ☐ $\det(\mathbb{1}_n) = 1$
- ☐ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
- ☐ $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(b) Sei R ein Ring und $A \in \mathrm{Mat}(n,n,R)$ eine invertierbare Matrix. Dann bilden die Spalten von A eine nummerierte Basis a. Sei e die Standardbasis von R^n. Es gilt:

- ☐ $A = M(\mathrm{id}, e, e)$
- ☐ $A = M(\mathrm{id}, a, e)$
- ☐ $A = M(\mathrm{id}, e, a)$
- ☐ $A = M(\mathrm{id}, a, a)$

(c) Sei $n \geq 2$ und $1 \leq i, j, k, l \leq n$ mit $i < j$ und $k < l$. Für die Transpositionen (i, j) und (k, l) in der Permutationsgruppe Σ_n gilt, dass $(i, j) \circ (k, l) = (k, l) \circ (i, j)$, genau dann, wenn die Menge $\{i, j, k, l\}$:

- ☐ zwei Elemente hat.
- ☐ zwei oder vier Elemente hat.
- ☐ zwei oder drei Elemente hat.
- ☐ drei oder vier Elemente hat.

(d) Die Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ der positiven rationalen Zahlen bildet zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Wenn wir diese als $\mathbb{Z}$-Modul betrachten, gilt dann:

- ☐ $\{1\}$ ist eine Basis.
- ☐ Die Menge der Primzahlen ist eine Basis.
- ☐ Die Menge der positiven ganzen Zahlen ist eine Basis.
- ☐ Es gibt keine Basis.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,4,\mathbb{Z}).$$

(a) Berechne $\det(A)$.

(b) Betrachte nun A als eine Matrix über $\mathbb{Z}/p$, wobei p eine Primzahl ist. Bestimme für jede Primzahl p den Rang von A.

(c) Bestimme eine Basis von $\mathrm{Ker}\big(L(A)\big)$ über $\mathbb{Z}/p$ für jede Primzahl p.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren auf V die Relation

$$\sim_W := \left\{(v, v') \in V \times V \,\middle|\, v - v' \in W\right\},$$

und notieren die Menge der Äquivalenzklassen als $V/W := V/\sim_W$.

(a) Zeige: $\sim_W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

(b) Wir betrachten die Abbildung $\pi : V \to V/W$, die $v \in V$ auf seine Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_W}$ schickt. Zeige: Es gibt eine eindeutige K-Vektorraumstruktur auf V/W, sodass die Abbildung π K-linear ist.

(c) Sei nun V endlich-dimensional. Zeige:

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$