Henning Krause SS 2017	**Lineare Algebra** Klausur 25.7.2017	Julia Sauter Jan Geuenich

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Diese Klausur enthält 16 Seiten. Überprüfen Sie dies. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter. Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.

Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sie dürfen dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese aber klar benennen.

In den Multiple-Choice-Aufgaben erhalten Sie für jede richtig vorgenommene Markierung einen Punkt. Für jede nicht richtig vorgenommene Markierung wird ein Punkt abgezogen. Das Nichtmarkieren einer Aussage führt nicht zum Punktabzug. Bei negativer Gesamtpunktzahl in einer Multiple-Choice-Aufgabe werden 0 Punkte vergeben.

Name, Vorname:

In den folgenden beiden Multiple-Choice-Aufgaben entscheide man jeweils für jede der Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ lineare Abbildungen.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist $\det(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.	☐	☐
(b)	Es gibt immer ein $\lambda \in K$ mit $\det(f + \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$.	☐	☐
(c)	Es gilt immer $\det(\lambda f) = \lambda \det(f)$ für alle $\lambda \in K$.	☐	☐
(d)	Es gilt immer $\det((fg)^2) = (\det(f)\det(g))^2$.	☐	☐

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien U_1 und U_2 Unterräume eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V.

		Wahr	Falsch
(a)	Gilt $U_1 + U_2^\perp = V$, so ist immer $U_2 + U_1^\perp = V$.	☐	☐
(b)	Gilt $U_1 \cap U_2^\perp = \{0\}$, so ist immer $\dim(U_2^\perp) \leq \dim(U_1^\perp)$.	☐	☐
(c)	Gilt $U_1 \subseteq U_2$, so ist immer $U_1 \cap U_2^\perp \subseteq U_2 \cap U_1^\perp$.	☐	☐
(d)	Es gilt immer $(U_1 \cup U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.	☐	☐

Name, Vorname:

Aufgabe 3 (1 + 1 + 3 + 3 Punkte):

Sei K ein Körper. Für $\lambda \in K$ betrachten wir die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)\,.$$

(a) Man berechne das charakteristische Polynom p_{A_λ}.

(b) Man berechne die Determinante $\det(A_\lambda)$ und die Spur $\mathrm{Sp}(A_\lambda)$.

(c) Man entscheide, für welche $\lambda \in K$ die Matrix A_λ invertierbar ist, und berechne für alle solchen λ die inverse Matrix A_λ^{-1}.

(d) Für $\lambda = 0$ bestimme man die Jordansche Normalform von A_λ.

Name, Vorname:

Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 4 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

(a) Man zeige, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Man berechne den Winkel zwischen den Vektoren v_1 und v_2.

(c) Man berechne die orthogonale Projektion von v_2 auf $\mathcal{L}(v_3)$.

(d) Man bestimme die Orthonormalbasis, die unter Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt auf v_1, v_2, v_3 entsteht.

Name, Vorname:

Aufgabe 5 (2 + 4 + 2 Punkte):

Sei n eine natürliche Zahl und sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix.

(a) Man gebe an, wann A *diagonalisierbar* und wann *trigonalisierbar* genannt wird.

(b) Es gelte nun $A^2 = A$. Man zeige, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Sp}(A)$ gilt.

(c) Man entscheide für die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ob sie über den reellen Zahlen diagonalisierbar ist.

Name, Vorname:

Aufgabe 6 (2 + 6 Punkte):

Seien V und W euklidische Vektorräume, U ein Unterraum von W und $f\colon V \to W$ linear.

(a) Man gebe die Definition der zu f *adjungierten Abbildung* wieder. Außerdem gebe man die Definition des *orthogonalen Komplements* von U an.

(b) Sei nun angenommen, es existiere die zu f adjungierte Abbildung f^*. Man beweise

$$f^{-1}(U^{\perp}) \;=\; (f^*(U))^{\perp}\,.$$