Henning Krause
SS 2017

Lineare Algebra
Klausur 25.7.2017 mit Lösungsvorschlag

Julia Sauter
Jan Geuenich

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ lineare Abbildungen.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist $\det(f) \neq 0$, so ist f surjektiv.	$\boxtimes$	$\square$
(b)	Es gibt immer ein $\lambda \in K$ mit $\det(f + \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0$.	$\square$	$\boxtimes$
(c)	Es gilt immer $\det(\lambda f) = \lambda \det(f)$ für alle $\lambda \in K$.	$\square$	$\boxtimes$
(d)	Es gilt immer $\det((fg)^2) = (\det(f)\det(g))^2$.	$\boxtimes$	$\square$

Begründungen:

(a) Wenn $\det(f) \neq 0$ gilt, ist f invertierbar, also insbesondere surjektiv.

(b) Es gilt $\det(f + \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0$ genau dann, wenn $-\lambda$ ein Eigenwert von f ist. Die lineare Abbildung $\mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2$, $v \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) v$, hat aber zum Beispiel keine Eigenwerte.

(c) Es gilt $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ mit $n = \dim V$. Wenn $f = \mathrm{id}_V \neq 0$ und $\lambda^n \neq \lambda$ gilt (im Fall $1 < n < |K|$ gibt es ein solches λ), ist $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f) \neq \lambda \det(f)$.

(d) Das folgt aus der Multiplikativität der Determinante.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien U_1 und U_2 Unterräume eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V.

		Wahr	Falsch
(a)	Gilt $U_1 + U_2^\perp = V$, so ist immer $U_2 + U_1^\perp = V$.	$\square$	$\boxtimes$
(b)	Gilt $U_1 \cap U_2^\perp = \{0\}$, so ist immer $\dim(U_2^\perp) \leq \dim(U_1^\perp)$.	$\boxtimes$	$\square$
(c)	Gilt $U_1 \subseteq U_2$, so ist immer $U_1 \cap U_2^\perp \subseteq U_2 \cap U_1^\perp$.	$\boxtimes$	$\square$
(d)	Es gilt immer $(U_1 \cup U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.	$\boxtimes$	$\square$

Begründungen:

(a) Für $V \neq \{0\}$, $U_1 = V$, $U_2 = \{0\}$ ist $U_1 + U_2^\perp = V$ aber $U_2 + U_1^\perp = \{0\} \neq V$.

(b) Aus $U_1 \cap U_2^\perp = \{0\}$ folgt $\dim(U_1) + \dim(U_2^\perp) \leq \dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_1^\perp)$, also $\dim(U_2^\perp) \leq \dim(U_1^\perp)$.

(c) Es gilt $U_2 \cap U_2^\perp = \{0\}$. Wegen $U_1 \subseteq U_2$ ist daher auch $U_1 \cap U_2^\perp = \{0\} \subseteq U_2 \cap U_1^\perp$.

(d) Für alle $v \in V$ gilt $v \in (U_1 \cup U_2)^\perp \Leftrightarrow v \in U_1^\perp \wedge v \in U_2^\perp \Leftrightarrow v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 3 + 3 Punkte):

Sei K ein Körper. Für $\lambda \in K$ betrachten wir die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)\,.$$

(a) Man berechne das charakteristische Polynom p_{A_λ}.

(b) Man berechne die Determinante $\det(A_\lambda)$ und die Spur $\mathrm{Sp}(A_\lambda)$.

(c) Man entscheide, für welche $\lambda \in K$ die Matrix A_λ invertierbar ist, und berechne für alle solchen λ die inverse Matrix A_λ^{-1}.

(d) Für $\lambda = 0$ bestimme man die Jordansche Normalform von A_λ.

Lösung:

(a) Man berechnet $p_{A_\lambda} = -x^3 + 2\lambda x + \lambda^2 \in K[x]$.

(b) Ablesen der Koeffizienten von p_{A_λ} liefert $\det(A_\lambda) = \lambda^2$ und $\mathrm{Sp}(A_\lambda) = 0$.

(c) Die Matrix A_λ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A_\lambda) \neq 0$, d.h. $\lambda \neq 0$ ist.
Im Fall $\lambda \neq 0$ ergibt eine Rechnung

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Für $A = A_0$ ist $p_A = -x^3$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt also $A^3 = 0$.
Allerdings ist $A^2 \neq 0$ wegen

$$A^2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Die Jordansche Normalform von A ist folglich

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (1 + 1 + 2 + 4 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Man zeige, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Man berechne den Winkel zwischen den Vektoren v_1 und v_2.

(c) Man berechne die orthogonale Projektion von v_2 auf $\mathcal{L}(v_3)$.

(d) Man bestimme die Orthonormalbasis, die unter Anwendung des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt auf v_1, v_2, v_3 entsteht.

Lösung:

(a) Man berechnet $\det(v_1, v_2, v_3) = 1 \neq 0$, sodass v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Wegen $\cos\theta(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1||v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist $\theta(v_1, v_2) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Wegen $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$ ist $p_{\mathcal{L}(v_3)}(v_2) = 0$.

(d) Die gesuchte Orthonormalbasis besteht aus den drei Vektoren c_1, c_2, c_3, die für $k \in \{1, 2, 3\}$ rekursiv durch $c_k = \frac{b_k}{|b_k|}$ und $b_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, b_j \rangle}{|b_j|^2} b_j$ gegeben sind.
Eine Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
b_1 &= v_1 &&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad & c_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
b_2 &= v_2 - \tfrac{1}{2} b_1 &&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad & c_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
b_3 &= v_3 - b_1 + 2b_2 &&= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad & c_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (2 + 4 + 2 Punkte):

Sei n eine natürliche Zahl und sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix.

(a) Man gebe an, wann A *diagonalisierbar* und wann *trigonalisierbar* genannt wird.

(b) Es gelte $A^2 = A$. Man zeige, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Sp}(A)$ gilt.

(c) Man entscheide für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ob sie über den reellen Zahlen diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Die Matrix A wird *diagonalisierbar* (bzw. *trigonalisierbar*) genannt, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix (bzw. zu einer oberen Dreiecksmatrix) ist.

(b) Aus $A^2 = A$ folgt, dass das Minimalpolynom von A ein Teiler von $x^2 - x = x(x-1)$ ist. Daher ist A diagonalisierbar und hat außer 0 und 1 keine Eigenwerte, sodass

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

für ein r mit $0 \leq r \leq n$ die Jordansche Normalform von A ist.

Hieraus folgt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = r = \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A)$, weil sowohl Rang als auch Spur einer Matrix unter Ähnlichkeit erhalten bleiben.

(c) Als reelle (2×2)-Matrix ist A wegen $(\mathrm{Sp}(A))^2 = 9 > 4 = 4\det(A)$ diagonalisierbar (und hat die beiden Eigenwerte $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$).

Aufgabe 6 (2 + 6 Punkte):

Seien V und W euklidische Vektorräume, U ein Unterraum von W und $f\colon V \to W$ linear.

(a) Man gebe die Definition der zu f *adjungierten Abbildung* wieder. Außerdem gebe man die Definition des *orthogonalen Komplements* von U an.

(b) Sei nun angenommen, es existiere die zu f adjungierte Abbildung f^*. Man beweise

$$f^{-1}(U^\perp) \;=\; (f^*(U))^\perp \,.$$

Lösung:

(a) Existiert eine lineare Abbildung $f^*\colon W \to V$, sodass für alle $v \in V$ und $w \in W$

$$\langle f(v), w\rangle \;=\; \langle v, f^*(w)\rangle$$

gilt, so wird f^* die zu f *adjungierte Abbildung* genannt.

Das *orthogonale Komplement* von U ist $U^\perp = \{w \in W \mid \langle u, w\rangle = 0 \;\; \forall u \in U\}$.

(b) Für jedes $v \in V$ hat man die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} v \in f^{-1}(U^\perp) \;\Leftrightarrow\; f(v) \in U^\perp \;&\Leftrightarrow\; 0 = \langle u, f(v)\rangle \quad \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow\; 0 = \langle f(v), u\rangle \quad \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow\; 0 = \langle v, f^*(u)\rangle \;\; \forall u \in U \\ &\Leftrightarrow\; 0 = \langle v, w\rangle \qquad \forall w \in f^*(U) \;\Leftrightarrow\; v \in (f^*(U))^\perp \,, \end{aligned}$$

woraus sich die behauptete Gleichheit $f^{-1}(U^\perp) = (f^*(U))^\perp$ ergibt.