Henning Krause SS 2017	**Lineare Algebra** Klausur 12.9.2017 mit Lösungsvorschlag	Julia Sauter Jan Geuenich

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien A und B zwei $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K.

		Wahr	Falsch
(a)	Es gilt immer $p_{A^T} = p_A$.	$\boxtimes$	$\square$
(b)	Wenn A und B dieselben Eigenwerte haben, so gilt immer $p_A = p_B$.	$\square$	$\boxtimes$
(c)	Ist A invertierbar, so gilt immer $p_A(0) \cdot p_{A^{-1}}(0) = 1$.	$\boxtimes$	$\square$
(d)	Sind A' und B' zwei $(n \times n)$-Matrizen über K, sodass A und A' ähnlich sind sowie B und B' ähnlich sind, dann sind immer auch AB und $A'B'$ ähnlich.	$\square$	$\boxtimes$

Begründungen:

(a) Nach Aufgabe 3 (a) vom 8. Übungsblatt sind A^T und A ähnlich. Insbesondere gilt also $p_{A^T} = p_A$, da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen.

(b) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ ist $p_A = x^2 + 1$ und $p_B = x^2 + 2$. Die Matrizen A und B haben also dieselben Eigenwerte (nämlich keine) und $p_A \neq p_B$.

(c) Es gilt $p_A(0) \cdot p_{A^{-1}}(0) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A) \cdot (\det(A))^{-1} = 1$.

(d) Die Matrizen $A = B = B' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $A' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sind ähnlich. Allerdings sind die Matrizen $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $A'B' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es nicht.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $|\cdot|$. Außerdem sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Man entscheide für jede der folgenden Aussagen, ob sie äquivalent dazu ist, dass f orthogonal ist.

		Ja	Nein
(a)	Es gibt eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.	$\square$	$\boxtimes$
(b)	Für alle $v \in V$ gilt $|f(v) - v| = 0$.	$\square$	$\boxtimes$
(c)	Für alle $v \in V$ gilt $|f(v)| = |v|$.	$\boxtimes$	$\square$
(d)	Es gilt $f^* f = \mathrm{id}_V$ für die zu f adjungierte Abbildung f^*.	$\boxtimes$	$\square$

Begründungen:

(a) Die Vektoren jeder Basis von V sind Eigenvektoren der Nullabbildung $f = 0$. Falls $V \neq 0$ gilt, ist die Nullabbildung $f = 0$ aber nicht orthogonal.

(b) Aus $|f(v) - v| = 0$ für alle v, folgt $f(v) = v$ für alle v, also $f = \mathrm{id}_V$. Falls $V \neq 0$ ist, gibt es aber von der Identität verschiedene orthogonale Abbildungen.

(c) Das ist Satz (V.7.3) (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(d) Das ist Satz (V.7.5) (i) $\Leftrightarrow$ (vi).

Aufgabe 3 (2 + 3 + 3 Punkte):

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Man zeige, dass das charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerfällt, und gebe für jeden Eigenwert von A seine algebraische Vielfachheit an.

(b) Man bestimme die Jordansche Normalform von A.

(c) Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Q}^3$ der Gleichung

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Man berechnet $p_A = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = (-1-x)^3$. Der einzige Eigenwert von A ist die dreifache Nullstelle -1 von p_A. Seine algebraische Vielfachheit ist 3.

(b) Sei $\lambda = -1$. Wegen $p_A = (\lambda - x)^3$ besitzt A eine Jordansche Normalform, die aus Blöcken $J_k(\lambda)$ mit $k \in \mathbb{N}$ besteht. Nun sind die ersten beiden Spalten der Matrix

$$A_\lambda := A - \lambda E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig, also $\operatorname{rg}(A_\lambda) = 2$. Die Jordansche Normalform von A ist folglich

$$J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei B_i die Matrix, welche aus A durch Ersetzen der i-ten Spalte mit $b = (1,1,1)$ entsteht, d.h.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet $\det(B_1) = 6$, $\det(B_2) = -6$, $\det(B_3) = 5$.

Außerdem gilt $\det(A) = p_A(0) = -1$. Insbesondere ist A invertierbar und nach der Cramerschen Regel

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(B_1) \\ \det(B_2) \\ \det(B_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (2 + 3 + 3 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(a) Man zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Man bestimme eine Orthonormalbasis von U.

(c) Man bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

Lösung:

(a) Offenbar ist $0 \in U$. Liegen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ in U und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$. Also liegt auch $\lambda x + y \in U$. Es folgt, dass U ein Untervektorraum ist.

(b) Es sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

drei linear unabhängig Vektoren in U. Wegen $U \neq \mathbb{R}^4$ gilt sogar $U = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.

Gemäß dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt bilden die drei Vektoren c_1, c_2, c_3, die rekursiv durch $c_k = \frac{b_k}{|b_k|}$ und $b_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, b_j \rangle}{|b_j|^2} b_j$ gegeben sind, eine Orthonormalbasis von U.

Eine Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
b_1 &= v_1 &&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & c_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
b_2 &= v_2 + \tfrac{1}{2} b_1 &&= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, & c_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
b_3 &= v_3 &&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & c_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Wir ergänzen v_1, v_2, v_3 durch $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Ähnlich wie in (b) berechnet man

$$b_4 = v_4 - \sum_{j=1}^{3} \frac{\langle v_4, b_j \rangle}{|b_j|^2} b_j = v_4 - \tfrac{1}{2} b_1 - \tfrac{1/2}{3/2} b_2 - \tfrac{0}{1} b_3 = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Verfahren von Gram–Schmidt folgt $\mathcal{L}(b_4) = (\mathcal{L}(b_1, b_2, b_3))^\perp = U^\perp$.

Aufgabe 5 (2 + 4 + 2 Punkte):

Sei n eine natürliche Zahl und sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix.

(a) Man gebe die Definitionen aus der Vorlesung wieder, unter welcher Bedingung A *orthogonal* und wann A *symmetrisch* genannt wird.

(b) Wir nehmen nun an, es gebe eine orthogonale Matrix S, sodass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist. Man beweise, dass A symmetrisch ist.

(c) Man entscheide, ob die Funktion $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x^T A y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Lösung:

(a) Die Matrix A wird *orthogonal* genannt, wenn sie regulär ist und $A^{-1} = A^T$ gilt. Sie heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^T$ gilt.

(b) Nach Annahme gilt $S^{-1} = S^T$ und SAS^T ist symmetrisch. Somit hat man

$$SAS^T \ = \ (SAS^T)^T \ = \ SA^T S^T \ .$$

Multiplikation von links mit S^{-1} und von rechts mit $(S^T)^{-1} = S$ liefert $A = A^T$.

(c) Für $v = (1, -1) \neq 0$ berechnet man $Av = (1, 1)$ und dann $v^T A v = 0$. Demzufolge kann die genannte Funktion kein Skalarprodukt sein.

Aufgabe 6 (2 + 3 + 3 Punkte):

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Außerdem seien $f, g\colon V \to V$ lineare Abbildungen und $f^*\colon V \to V$ bezeichne die zu f adjungierte Abbildung.

(a) Man gebe die Definition aus der Vorlesung wieder, wann f *normal* genannt wird.

(b) Man zeige: Ist f normal, so gilt $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.

(c) Man zeige: Sind f und g normal, so ist genau dann $gf = 0$, wenn $fg = 0$ ist.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung ist V endlichdimensional, was die Existenz der zu f adjungierten Abbildung f^* gewährleistet. Die Abbildung f wird nun *normal* genannt, wenn sie mit ihrer Adjungierten f^* vertauschbar ist, d.h. wenn $ff^* = f^*f$ gilt.

(b) Wir haben $\mathrm{Im}(f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f^*)^\perp$, wobei die erste und die letzte Gleichheit gemäß Satz (V.5.5) und die mittlere wegen Folgerung (V.5.10) gelten. Unter Verwendung von Folgerung (V.3.6) (ii) ergibt sich hieraus $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^*)$.

(c) Es ist $gf = 0 \Leftrightarrow g^*f = 0 \overset{\text{(b)}}{\Leftrightarrow} g^*f^* = 0 \Leftrightarrow (fg)^* = 0 \Leftrightarrow fg = 0$, wobei die erste Äquivalenz die aus Satz (V.5.5) bekannte Gleichheit $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(g^*)$ benutzt.