LINEARE ALGEBRA II
11. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \mid A^tA = E\}$. Die Elemente von $O_n(\mathbb{R})$ heißen orthogonale Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ ist.
(b) Zeigen Sie für eine Matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ gilt: A ist genau dann orthogonal, wenn $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes ist.
(c) Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $O_2(\mathbb{R}) = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{S(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Zeigen Sie zuerst: Für $v \in \mathbb{R}^2$ gilt $|v| = 1$ genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit $v = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Wir betrachten eine Ebene $E = v_0 + U$ mit $v_0 = (1, 1, 1)$ und $U = \mathcal{L}(e_1 - e_3, e_2 + e_3)$. Es sei $v = (2, 3, 4) \in V$. Es sei

$$d(v, E) = \min_{w \in E} |v - w|$$

der Abstand von v zu E. Überlegen Sie sich eine Methode zur Berechnung dieses Abstandes und berechnen Sie $d(0, E)$ und $d(v, E)$.
Hinweis: VL, Satz (3.8)

Aufgabe 3. Es sei $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ mit $f, g \in V$. Berechnen Sie den Winkel zwischen $f, g \in V$ definiert durch $f(x) = x$ und $g(x) = \sqrt{3}(x - 1) + 1$.

Aufgabe 4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_A \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $A = B^tB$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es sei $U = \mathcal{L}(e_2, e_3) \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Finden Sie eine ON-Basis b_1, b_2 für U bezüglich der Einschränkung des Skalarproduktes $(\langle -, - \rangle_A)|_{U \times U} \colon U \times U \to \mathbb{R}$.
(b) Finden Sie eine ON-Basis b_3 für $U^\perp$ bezüglich $\langle -, - \rangle_A$.
(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M(p; a_1, a_2, a_3, c_1, c_2)$ für die orthogonale Projektion $p \colon \mathbb{R}^3 \to U$ bezüglich

(1.) der Standardbasis $a_1 = e_1, a_2 = e_2, a_3 = e_3$ in $\mathbb{R}^3$ und der Basis $c_1 = e_2, c_2 = e_3$ von U.

(2.) der ON-Basis $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ von $\mathbb{R}^3$ aus Teil (a),(b) und $c_1 = b_1, c_2 = b_2$ aus Teil (a).