LINEARE ALGEBRA II
13. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Es sei K der Körper der reellen (oder der komplexen Zahlen). Es sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ und $f_A\colon K^n \to K^n, f_A(x) = Ax$. Wir betrachten K^n mit dem Standardskalarprodukt. Wir definieren $A^* := A^T$ falls $K = \mathbb{R}$ gilt und $A^* := \overline{A}^T$ falls $K = \mathbb{C}$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Falls es ein $\lambda \in K$ gibt mit $A = \lambda A^*$ oder $(\lambda A^*)A = E_n$, dann ist f_A normal. Gilt in diesem Fall immer $\lambda \in \{0, 1, -1\}$? Spezialfälle sind
für $K = \mathbb{R}$: A (schief-)symmetrisch falls $A = A^T$ (bzw. $A = -A^T$) und A orthogonal falls $AA^T = E_n$,
für $K = \mathbb{C}$: A (schief-)hermitesch falls $A = A^*$ (bzw. $A = -A^*$) und A unitär falls $AA^* = E_n$.

(b) Entscheiden Sie, ob f_A normal ist in den folgenden Fällen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & i \\ 2 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $f_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, f_A(x) = Ax$ normal. Finden Sie eine ON-Basis von $\mathbb{C}^3$ bzgl. des Standardskalarproduktes, die aus Eigenvektoren für f_A besteht.

Aufgabe 3. Es sei f ein normaler Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Wir nennen einen Unterraum U f-invariant falls $f(U) \subseteq U$ gilt.

Zeigen Sie, dass $P(f)$ normal ist. Folgern Sie aus Satz (5.5) aus der VL, dass $\mathrm{Im} P(f)^\perp$ und $\mathrm{Ker} P(f)^\perp$ (und natürlich deren orthogonale Komplemente) f-invariant sind.
(Insbesondere gilt dies für Eigenräume und verallgemeinerte Eigenräume von f.)

Aufgabe 4. Es sei f ein normaler Endomorphismus eines Vektorraumes mit Skalarprodukt. Zeigen Sie: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von f sind orthogonal zueinander.
Hinweis: Benutzen Sie Lemma (5.11) aus der VL.