LINEARE ALGEBRA II
14. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Dieses Blatt ist **optional** für die letzte Präsenzübung vor der Klausur. Hier werden etwas schwierigere Multiple Choice Aufgaben geübt (die Antworten und zwei weitere Aufgaben finden Sie auf der Rückseite).
Wichtig dabei: Bleiben Sie gelassen und beantworten Sie die Fragen, die Sie beantworten können. Keine Antwort ist besser als eine falsche (denn jede falsche Antwort gibt einen Punkt Abzug).

Aufgabe 1. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und $P \in K[X]$ ein Polynom. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Wenn $P(f) = 0$ gilt, dann gilt auch $P(\lambda) = 0$ für alle Eigenwerte von f.
2. f hat immer mindestens einen Eigenwert.
3. f ist genau dann diagonalisierbar, wenn es ein Polynom mit paarweise verschiedenen Nullstellen in K gibt, das f annuliert.
4. Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(f)$.
5. Falls f nilpotent ist, so ist $\dim \mathrm{Ker} f$ die Größe des größten Blocks in der JNF von f.
6. Falls $P(f) = 0, P(0) = 0$ gilt, so ist f kein Isomorphismus.
7. Es sei f^* die duale Abbildung von f. Dann haben f und f^* das gleiche char. Polynom.
8. Wenn 0 kein Eigenwert von f ist, so ist f ein Isomorphismus.

Aufgabe 2. Es sei K entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Es sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. In dieser Aufgabe bezeichnet $g\colon V \to V$ die **adjungierte** Abbildung zu f. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Falls $fg = gf$ gilt, so haben alle Eigenwerte von f den Betrag 1.
2. Falls f normal ist, so gibt es immer eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f.
3. Aus je $n = \dim V$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ kann man mit dem Orthonormalisierungsverfahren eine ON-Basis bilden.
4. Es gilt $\langle f(v), f(v) \rangle = \langle g(v), g(v) \rangle$ für alle $v \in V$.
5. Die Abbildung $P(fg)$ ist selbstadjungiert für alle $P \in \mathbb{R}[X]$.
6. Falls $f = g$ gilt, so gilt $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$.
7. Sind U, W zwei Unterräume von V mit $U \cap W = 0$, so gilt $U \subset W^\perp$.
8. Falls $f = g$ gilt und U ist ein f-invarianter Unterraum, so ist $U^\perp$ auch f-invariant.

Lösung der Aufgaben 1 und 2 (zur Selbstkontrolle):
A1) wfwwffww
A2) ffffwffw.

Aufgabe 3.

(a) Es sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums mit $f^2 = f^3$. Erkären Sie, warum f trigonalisierbar ist und welche Blöcke in der JNF von f vorkommen können.

(b) Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie die JNF für die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\mathrm{char}(K) = 2$ und $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Aufgabe 4. Wir betrachten nun $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es sei weiterhin $U = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

(a) Orthonormalisieren Sie v_1, v_2, v_3 zu einer ON-Basis b_1, b_2, b_3.

(b) Es sei $p_U \colon V \to U$ die orthogonale Projektion auf U. Berechnen Sie $p_U(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$.