LINEARE ALGEBRA II
4. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Sind A und B ähnliche Matrizen und auch C und D ähnliche Matrizen, so sind auch
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
ähnliche Matrizen.

(b) Es sei $\lambda \in K, \lambda \neq 0$ und $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Zeigen Sie:
A is genau dann ähnlich zu λE_n, wenn $A = \lambda E_n$ gilt.
A is genau dann äquivalent zu λE_n, wenn A invertierbar ist.

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, n ungerade und $A \in \mathcal{M}_n(K)$ mit $A^T = -A$. Zeigen Sie $\det(A) = 0$.

Aufgabe 3.

(a) Sei K ein Körper und $f = \sum_{i=0}^{t} a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Sind $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ zwei ähnliche Matrizen, so sind auch $f(A)$ und $f(B)$ ähnlich.

(b) Es sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f \in \mathcal{M}_n(K)$ gibt mit $f(A) = 0$.

Aufgabe 4.

(a) Es sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotent, das heißt es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$. Zeigen Sie, dass 0 einziger Eigenwert von A ist und die Eigenvektoren gleich der Menge der nicht-trivialen Lösungen x von $Ax = 0$ ist.

(b) Es sei $\lambda \in K$ und
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A, B und C.