Universität Bielefeld SS 2017

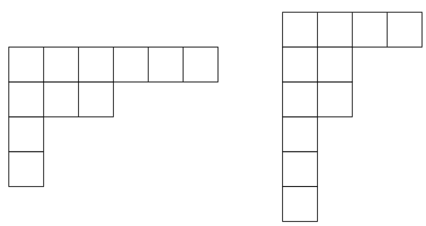
LINEARE ALGEBRA II
8. PRÄSENZÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Aufgabe 1. *(Algorithmus für JNF von nilpotenten Endomorphismen)*
Es sei n eine natürliche Zahl. Eine Folge $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ mit $a_i \in \mathbb{N}, a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ und $\sum_{i=1}^r a_i = n$ heißt Partition von n. Die Partitionen von n entsprechen den möglichen Jordanschen Normalenformen einer nilpotenten Transformation eines n-dimensionalen Vektorraumes.

(a) Schreiben Sie die Partitionen von 5 auf und die entsprechenden Jordanschen Normalenformen.

(b) Partitionen von n kann man *transponieren*, wir erklären dies am Beispiel: Der Partition $(a_1, \dots, a_r)$ ordnen wir Reihen von Boxen zu, in der ersten Reihe a_1 Boxen, ..., in der r-ten Reihe a_r Boxen. Wir ordnen diese linksbündig, dies ist das *Young Diagramm* der Partition. Vertauschung von Reihen und Spalten (also Spiegelung an der Diagonalen) gibt ein neues Young Diagramm, die zugehörige Transposition ist die transponierte Partition.

$(6,3,1,1) \leftrightarrow$  $\leftrightarrow (4,2,2,1,1,1)$

Transponieren Sie die Partitionen $(1,1,1,1), (5,3,3,3,2)$.

(c) Es sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ eine nilpotente Matrix vom Nilpotenzgrad $r (\leq n)$. In diesem Fall gibt

$$a_1 = \mathrm{rk}(A^0) - \mathrm{rk}(A^1), a_2 = \mathrm{rk}(A^1) - \mathrm{rk}(A^2), \dots, a_r = \mathrm{rk}(A^{r-1}) - \mathrm{rk}(A^r)$$

eine Partition von n. Es sei $A \in \mathcal{M}_{11}(K)$ eine nilpotente Matrix in Jordanscher Normalenform mit korrespondierender Partition $(6,3,1,1)$, insbesondere ist 6 der Nilpotenzgrad von A. Berechnen Sie $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ für die Matrix A. Überprüfen Sie, dass dies genau die transponierte Partition von $(6,3,1,1)$ ergibt.

(d) Statt mit Rängen, kann man auch mit Dimensionen von Kernen arbeiten. Es sei $A \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotent und $f \colon K^n \to K^n, f(x) = Ax$. Zeigen Sie

$$a_i = \mathrm{rk}(A^{i-1}) - \mathrm{rk}(A^i) = \mathrm{dimKer} f^i - \mathrm{dimKer} f^{i-1}$$

für alle $i \geq 1$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalenformen für ein nilpotentes $A \in \mathcal{M}_6(K)$ mit $\mathrm{rk}(A^3) = 3$.

Aufgabe 3. Es sei $f\colon \mathbb{Q}^6 \to \mathbb{Q}^6, f(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man leicht $p_f(X) = (3-X)^4X^2$. Also hat diese lineare Abbildung die Eigenwerte 3 und 0.

(1) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(3\mathrm{id} - f)$, ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Ker}(3\mathrm{id} - f)^2$.
(2) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker} f$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{Ker} f^2$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^6$, so dass die darstellende Matrix von f in Jordanscher Normalenform ist.

Aufgabe 4. Angenommen, Sie wollen nur die Jordansche Normalenform in A3 berechnen. Erklären Sie den Algorithmus von A1 an diesem Beispiel: Berechnen Sie

$a_1^{(3)} = 6 - \mathrm{rk}(3\mathrm{id} - f), a_2^{(3)} = \mathrm{rk}(3\mathrm{id} - f) - \mathrm{rk}(3\mathrm{id} - f)^2, \quad a_1^{(0)} = 6 - \mathrm{rk} f, a_2^{(0)} = \mathrm{rk} f - \mathrm{rk} f^2.$

Transponieren Sie die Partitionen $(a_1^{(3)}, a_2^{(3)})$ und $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$ um die Größen der Blöcke zu ermitteln.