LINEARE ALGEBRA II
1. ÜBUNGSBLATT

PROF. DR. HENNING KRAUSE
DR. JULIA SAUTER

Wir betrachten auf diesem Blatt den Standardraum als Spaltenraum.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ und $B \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{Q})$ durch elementare Zeilenumformungen oder zeigen Sie, dass die inversen Matrizen nicht existieren.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Es seien

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -12 \\ -2 & 6 & -12 & 6 \\ 4 & -9 & 16 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Q})$$

und $r = \mathrm{rgM}$.

(a) Finden Sie eine invertierbare Matrix $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{Q})$ und eine invertierbare Matrix $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$, so dass die Matrix BMA^{-1} in Blockform durch

$$BMA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(b) Lösen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$Mx = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. es gelte $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i > j$. Beweisen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn das Produkt der Diagonaleinträge $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ von 0 verschieden ist.

Aufgabe 4. Es seien $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{Q})$ und $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ eine Anordnung der Basis, die durch die Menge der Elementarmatrizen gegeben ist. Für

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in V definieren wir $f\colon V \to V,\ A \mapsto A^T \cdot B$ und $g\colon V \to V,\ A \mapsto A^T \cdot C$. Zeigen Sie, dass f und g lineare Abbildungen sind und berechnen Sie $M(f; E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ und $M(g; E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Finden Sie eine Basis für $\operatorname{Ker} g$.

Abgabe: Dienstag, 25. April 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.