LINEARE ALGEBRA II
3. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Man bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen über dem Körper der rationalen Zahlen. Hierbei verwende man in jedem Aufgabenteil ein anderes der aus der Vorlesung bekannten Verfahren zur Berechnung.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(je 1 Punkt)

Aufgabe 2. Seien a, b, c, d reelle Zahlen. Man beweise die folgenden Identitäten:

$$\text{(a)} \quad \det \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

$$\text{(b)} \quad \operatorname{ad} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & ca & ab \\ -(b+c) & -(c+a) & -(a+b) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-b & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der *Fibonacci-Zahlen*, die rekursiv durch die Startwerte $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$ sowie die Bildungsvorschrift $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$ bestimmt ist. Setze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\,.$$

(a) Für $n \geq 1$ zeige man

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}\,.$$

(b) Man folgere aus der Multiplikativität der Determinante für $n \geq 1$ die Gleichung

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{n+1}\,.$$

(je 2 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 9. Mai 2017, bis 10.15 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.

Aufgabe 4. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Gegeben eine $(m \times m)$-Matrix A, eine $(m \times n)$-Matrix B und eine $(n \times n)$-Matrix C über dem Körper K betrachte man die Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+n}(K) .$$

Man beweise die Formel

$$\det(M) = \det(A) \det(C) .$$

(4 Punkte)