Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze – Eine unscharfe Skizze

Wir folgen Geschkes Ausarbeitung im Vorlesungsskript "Einführung in die Logik und Modelltheorie", die wiederum auf Kapitel 10 aus Ebbinghaus' Buch "Einführung in die mathematische Logik" zu beruhen scheint.

Bezeichne mit H die Menge der (fundierten) erblich endlichen Mengen.

Definition. *Eine Teilmenge $X \subseteq H$ heißt* r(ekursiv) a(ufzählbar)*, wenn es ein "Programm" P mit $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibt, wobei x_n die n-te "Ausgabe" von P ist.*

Eine Teilmenge $X \subseteq H$ heißt entscheidbar*, wenn es ein "Programm" gibt, das bei "Eingabe" von $x \in H$ mit "Ja" terminiert, wenn $x \in X$ ist, und sonst mit "Nein".*

Lemma. *$X \subseteq H$ ist genau dann entscheidbar, wenn X und $H \setminus X$ r.a. sind.* □

Lemma. *Es gibt eine S^{Peano}-Formel* Primzahl*, sodass für alle $p, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\check{\mathbb{N}} \models \mathrm{Primzahl}(p, n) \;\Leftrightarrow\; p \textit{ ist die } n\textit{-te Primzahl}$$ □

Wir wollen annehmen, dass die Symbole des Vokabulars S^{Peano} so gewählt wurden, dass sie eine entscheidbare Menge bilden. Mit der Beobachtung des letzten Lemmas kann dann eine injektive entscheidbare Funktion $z \mapsto \ulcorner z \urcorner$ konstruiert werden, die endlich erblichen Mengen und insbesondere "Programmen" und "Eingaben" variablenfreie S^{Peano}-Terme zuordnet, sodass folgende Aussage zutrifft:

Lemma. *Es gibt eine S^{Peano}-Formel* Terminiert*, sodass für alle "Programme" P und "Eingaben" E gilt:*

$$\check{\mathbb{N}} \models \mathrm{Terminiert}(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner E \urcorner) \;\Leftrightarrow\; P \textit{ terminiert bei "Eingabe" } E$$ □

Es ergibt sich die "Unentscheidbarkeit der Arithmetik":

Korollar. $\mathrm{Th}(\check{\mathbb{N}})$ *ist nicht entscheidbar.*

Beweis. Angenommen doch. Wähle ein "Programm" Q, dass für S^{Peano}-Aussagen π entscheidet, ob $\check{\mathbb{N}} \models \pi$ gilt. Dann terminiert Q bei "Eingabe" $\mathrm{Terminiert}(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner E \urcorner)$ mit "Ja" genau dann, wenn das "Programm" P bei "Eingabe" E terminiert. Damit wäre also das "Halteproblem" entscheidbar, ein Widerspruch. □

Fixiere nun eine S-Theorie T über einem Vokabular S mit r.a. Symbolmengen. Bezeichne mit $T^{\vdash}$ die Menge aller S-Aussagen π mit $T \vdash \pi$.

Lemma. *Ist T r.a., so auch $T^{\vdash}$.*

Beweis. Ist T r.a., so auch die Menge der T-Beweise. □

Definition. *T ist* vollständig*, wenn $T \vdash \pi$ oder $T \vdash \neg\pi$ für jede S-Aussage π gilt.*

Lemma. *Ist T r.a., konsistent und vollständig, so ist $T^{\vdash}$ entscheidbar.*

Beweis. Da $T^{\vdash}$ und $\{\bot\}^{\vdash}$ r.a. sind, genügt es zu zeigen, dass auch die Menge der S-Aussagen π mit $T \nvdash \pi$ r.a. ist. Wegen $T \nvdash \pi \Leftrightarrow T \vdash \neg\pi$ ist das klar. □

Definition. *Eine r-stellige Relation $R \subseteq H^r$ heißt* in T (durch π) repräsentierbar, *wenn es eine S-Formel π mit folgender Eigenschaft für alle $x_1, \ldots, x_r \in H$ gibt:*

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_r) \in R \quad &\Rightarrow \quad T \vdash \quad \pi(\ulcorner x_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner x_r \urcorner)\\ (x_1, \ldots, x_r) \notin R \quad &\Rightarrow \quad T \vdash \neg\pi(\ulcorner x_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner x_r \urcorner)\end{aligned}$$

Eine Funktion $f\colon H^{r-1} \to H$ wird als in T (durch π) repräsentierbar *bezeichnet, wenn die Relation $f \subseteq H^r$ in T durch π repräsentierbar ist und zusätzlich gilt:*

$$T \vdash \bigvee\nolimits_y^! \pi(\ulcorner x_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner x_{r-1} \urcorner, y)$$

Sei $\widehat{\mathrm{PA}}$ die volle Peanoarithmetik (siehe Definition 5.13 im Skript von Geschke). Weiterhin bezeichne S von nun an ein Vokabular, über dem $\widehat{\mathrm{PA}}$ definiert ist.

Satz (Fixpunktsatz)**.** *Sind alle entscheidbaren Relationen und Funktionen in T repräsentierbar, so gibt es für jede S-Formel $\varphi(x)$ eine S-Aussage ψ mit der Eigenschaft:*

$$T \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner))$$

Beweis. Die Funktion $f\colon H^2 \to H$ mit $f(\chi, y) = \chi(\ulcorner y \urcorner)$ für S-Formeln χ mit genau einer freien Variable und mit $f(x, y) = \emptyset$ überall sonst ist entscheidbar.

Wähle $\psi = \chi(\ulcorner \chi \urcorner)$ mit $\chi = \bigwedge_z (\pi(x, x, z) \to \varphi(z))$ wobei π eine beliebig gewählte S-Formel ist, die f in T repräsentiert. Wegen $f(\chi, \chi) = \psi$ gilt $T \vdash \pi(\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner)$ und $T \vdash \bigvee_z^! \pi(\ulcorner \chi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner, z)$, was ohne Schwierigkeiten $T \vdash (\psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner))$ liefert. □

Satz (Erster Unvollständigkeitssatz)**.** *Jede r.a. konsistente S-Theorie T, in der alle entscheidbaren Relationen und Funktionen repräsentierbar sind, ist nicht vollständig.*

Beweis. Wäre T vollständig, so wäre $T^{\vdash}$ entscheidbar und daher in T repräsentierbar. Wähle eine S-Formel χ mit $T \vdash \pi \Rightarrow T \vdash \chi(\ulcorner \pi \urcorner)$ und $T \nvdash \pi \Rightarrow T \vdash \neg\chi(\ulcorner \pi \urcorner)$ für alle S-Aussagen π. Nun gibt es eine S-Aussage ψ mit $T \vdash (\psi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner \psi \urcorner))$ nach dem Fixpunktsatz. Wegen $T \nvdash \psi \Rightarrow T \vdash \neg\chi(\ulcorner \psi \urcorner) \Rightarrow T \vdash \psi$ gilt $T \vdash \psi$. Aber aus $T \vdash \psi$ folgt sowohl $T \vdash \chi(\ulcorner \psi \urcorner)$ als auch $T \vdash \neg\chi(\ulcorner \psi \urcorner)$ im Widerspruch zur Konsistenz. □

Für den zweiten Unvollständigkeitssatz brauchen wir:

Lemma. *Jede entscheidbare Relation und Funktion ist in $\widehat{\mathrm{PA}}$ repräsentierbar.* □

Wenn T entscheidbar ist, so ist auch die Relation $B \subseteq H^2$ der Paare $(\ulcorner X \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner)$, wo X ein T-Beweis der S-Formel φ ist, entscheidbar und im Fall $\widehat{\mathrm{PA}} \subseteq T$ dann sogar in T repräsentierbar. Sei $\mathrm{Beweist}(x, y)$ in diesem Fall eine fixierte S-Formel, welche die Relation B in T repräsentiert, und setze $\mathrm{Pr}(y) = \bigvee_x \mathrm{Beweist}(x, y)$.

Wenn man sich davon überzeugt hat (wozu vermutlich $\mathrm{Beweist}(x, y)$ hinreichend geschickt gewählt sein sollte), dass die Formel Pr bezüglich $\varphi \mapsto \ulcorner \varphi \urcorner$ die Hilbert–Bernays–Löb'schen Regeln erfüllt, ergibt sich schließlich mit Aufgabe 3.1 (b):

Satz (Zweiter Unvollständigkeitssatz)**.** *Jede entscheidbare konsistente S-Theorie T, die die volle Peanoarithmetik $\widehat{\mathrm{PA}}$ enthält, erfüllt $T \nvdash \neg\,\mathrm{Pr}(\ulcorner \bot \urcorner)$.*