Henning Krause Jan Geuenich	**Algebra I** Klausur 7.2.2018	WS 2017/18

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt.

Diese Klausur enthält 16 Seiten. Überprüfen Sie dies. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter. Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie keinen Rotstift.

Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sie dürfen dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese aber klar benennen.

In den Multiple-Choice-Aufgaben erhalten Sie für jede richtig vorgenommene Markierung einen Punkt. Für jede nicht richtig vorgenommene Markierung wird ein Punkt abgezogen. Das Nichtmarkieren einer Aussage führt nicht zum Punktabzug. Bei negativer Gesamtpunktzahl in einer Multiple-Choice-Aufgabe werden 0 Punkte vergeben.

Name, Vorname:

In den folgenden beiden Multiple-Choice-Aufgaben entscheide man jeweils für jede der Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler N und einer Untergruppe H.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist G abelsch und endlich erzeugt, so ist auch G/N endlich erzeugt.	☐	☐
(b)	Hat G außer H keine weitere Untergruppe der Ordnung $\|H\| < \infty$, so ist H ein Normalteiler in G.	☐	☐
(d)	Hat G keine nichttriviale echte Untergruppe, so ist G endlich.	☐	☐
(c)	Ist G einfach, so ist H einfach oder trivial.	☐	☐

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L \setminus K$ algebraisch über K.

		Wahr	Falsch
(a)	Ist L ein Zerfällungskörper von $\mathrm{Irr}(\alpha, K)$, so zerfällt $\mathrm{Irr}(\beta, K)$ in $L[X]$ in Linearfaktoren.	☐	☐
(b)	Es gilt $[K(\alpha+\beta) : K] \leq [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K]$.	☐	☐
(c)	Es gilt $\frac{1}{42}[K(\alpha) : K] \leq [K(\alpha^{42}) : K]$.	☐	☐
(d)	Sind α und β separabel über K, so ist auch $\alpha^2 + \beta^{-1}$ separabel über K.	☐	☐

Name, Vorname:

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte):

Sei $X = \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ und $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \,|\, n \in 2\mathbb{Z} \right\}$.

(a) Man zeige, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ ist.

(b) Man zeige, dass die Vorschrift

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (a, b, c)\right) \;\mapsto\; (a,\; b + 2an,\; an^2 + bn + c)$$

eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ liefert.

(c) Man bestimme für $x = (0, 2, 3) \in X$ die Bahn Gx und die Standgruppe G_x.

Name, Vorname:

Aufgabe 4 (3 + 3 + 3 + 3 Punkte):

Wir fassen $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auf.

(a) Man beweise oder widerlege, dass der Ring $\mathbb{Q}[X]/(X^5 - 6X^2 + 3)$ ein Körper ist.

(b) Man bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[11]{3})/\mathbb{Q}$.

(c) Man bestimme das Minimalpolynom von $\pi - i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{2} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

Name, Vorname:

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei G eine nichttriviale p-Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Man zeige, dass es einen Vektor $v \in \mathbb{F}_p^n$ gibt, der Eigenvektor von jeder Matrix in G ist.

Name, Vorname:

Aufgabe 6 (5 Punkte):

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in L$ ein Element mit der Eigenschaft, dass $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}_L$ gilt.

Man beweise $L = K(\alpha)$.