ALGEBRA I
0. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Entscheide für jede der folgenden Verknüpfungen $\diamond\colon A \times A \to A$, ob sie (1) assoziativ ist, (2) kommutativ ist, (3) ein neutrales Element besitzt, (4) eine Monoidstruktur auf A definiert, (5) eine Gruppenstruktur auf A definiert:

(a) $A = \mathbb{N}$ und $x \diamond y = \mathrm{kgV}(x, y)$.
(b) $A = \mathbb{R}_{>0}$ und $x \diamond y = \frac{x+y}{2}$.
(c) $A = \mathbb{R}_{>0}$ und $x \diamond y = \max(x, y)$.
(d) $A = \mathbb{R}_{>0}$ und $x \diamond y = x^y$.
(e) $A = \mathcal{P}(X)$ und $x \diamond y = x \cup y$, wobei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge einer Menge X bezeichnet.
(f) $A = \mathcal{P}(X)$ und $x \diamond y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$.
(g) $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ und $x \diamond y = x \cdot y$.
(h) $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ und $x \diamond y = x + y$.
(i) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0\}$ und $(x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + x_1 y_2)$.
(j) $A = \mathbb{R}^3$ und $x \diamond y = x \times y$ mit dem Kreuzprodukt
$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)\,.$$

Aufgabe 2. Sei A eine Menge mit Verknüpfung $\diamond\colon A \times A \to A$. Ein Element $e \in A$ wird *linksneutral* (bzw. *rechtsneutral*) genannt, wenn $e \diamond a = a$ (bzw. $a \diamond e = a$) für alle $a \in A$ gilt.

Finde eine Verknüpfung $\diamond$, die mehrere verschiedene linksneutrale Elemente besitzt. Kann eine solche Verknüpfung auch rechtsneutrale Elemente besitzen?

Aufgabe 3. Sei $\diamond$ eine assoziative Verknüpfung auf A. Zeige, dass $(A, \diamond)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn A nicht leer ist und es für alle $a, b \in A$ Elemente $x, y \in A$ mit $xa = b = ay$ gibt.

Aufgabe 4. Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ für alle $g \in G$.
(b) Wenn $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenisomorphismus ist, ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon H \to G$ auch ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 5. Zeige, dass $x \mapsto e^{ix}$ einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot\,)$ definiert.

Aufgabe 6. Welche der folgenden Gruppen sind isomorph zueinander?
$$(\mathbb{Z}, +)\,,\ (\mathbb{Q}, +)\,,\ (\mathbb{R}, +)\,,\ (\mathbb{C}, +)\,,\ (\mathbb{Z}^\times, \cdot\,)\,,\ (\mathbb{Q}^\times, \cdot\,)\,,\ (\mathbb{R}^\times, \cdot\,)\,,\ (\mathbb{R}_{>0}, \cdot\,)\,,\ (\mathbb{C}^\times, \cdot\,)$$

Gruppensudoku. Jedes der drei untenstehenden Quadrate lässt sich zu einer Verknüpfungstabelle einer endlichen Gruppe vervollständigen. Trage die fehlenden Elemente ein und bestimme jeweils das neutrale Element. Welche der Gruppen sind abelsch? Welche sind isomorph zueinander?

$\diamond$	1	2	3	4
1	3			
2				
3				
4		1		

⌑	1	2	3	4
1				
2				3
3				
4			1	

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1							8	
2								
3								
4								
5						7		
6					4			
7								
8		5					6	