ALGEBRA I
6. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimme das Zentrum ...

(a) ... der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$.

(b) ... der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 2. Bestimme alle Kompositionsreihen der symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_3$ und $\mathcal{S}_4$.

Anmerkung: Hiernach kennt man die Kompositionsreihen von allen symmetrischen Gruppen $\mathcal{S}_n$. Einerseits ist nämlich $\mathcal{S}_1$ trivial und $\mathcal{S}_2$ einfach. Andererseits hat $\mathcal{S}_n$ für $n \geq 5$ außer der – in diesem Fall einfachen – alternierenden Gruppe $\mathcal{A}_n$ keine weiteren echten nicht-trivialen Normalteiler.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $[n] = \{1, \ldots, n\}$ und betrachten die Menge

$$\mathcal{P}_n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0 \mid \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n \text{ und } \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n\}$$

der Partitionen von n und die in der Vorlesung eingeführte Abbildung $\pi \colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{P}_n$, welche $\sigma \in \mathcal{S}_n$ auf die durch die Kardinalitäten der Bahnen in $\langle\sigma\rangle\backslash[n]$ bestimmte Partition von n schickt.

Zeige, dass die Abbildung π surjektiv ist und dass die Mengen $\pi^{-1}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathcal{P}_n$ gerade die Konjugationsklassen von $\mathcal{S}_n$ sind.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe und seien $C_1, \ldots, C_r$ die Konjugationsklassen von G. Sind dann $x_1 \in C_1, \ldots, x_r \in C_r$ Vertreter der Konjugationsklassen, so gilt $G = \langle x_1, \ldots, x_r\rangle$.

(4 Punkte)

Zusatzaufgabe. Ein Skatblatt wird wie folgt gemischt: Der Stapel wird in obere und untere Hälfte geteilt. Die beiden Hälften werden dann so ineinander geschoben, dass der neu entstehende Stapel von oben beginnend abwechselnd eine Karte von unterer und oberer Hälfte enthält. Wie oft muss gemischt werden, bis sich die Karten wieder in ihrer Ursprungsreihenfolge befinden?

(2 Zusatzpunkte)

Abgabe: Donnerstag, 23. November 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.