ALGEBRA I
8. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{H} = \{aE + bI + cJ + dK \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\mathbb{H}$ einen Teilring von $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ bildet, der ein Schiefkörper ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer vom Nullring verschiedener Ring. Für jedes $r \in R$ bezeichne mit μ_r die durch $x \mapsto rx$ gegebene Abbildung $R \to R$. Zeige:

(a) Der Ring R ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn μ_r für alle $r \in R \setminus \{0\}$ injektiv ist.

(b) Der Ring R ist genau dann ein Körper, wenn μ_r für alle $r \in R \setminus \{0\}$ surjektiv ist.

(c) Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.

(d) Der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

(je 1 Punkt)

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige:

(a) Das von einem Ideal I in R erzeugte Ideal im Polynomring $R[X]$ ist

$$I[X] \; = \; \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r_n X^n \in R[X] \;\middle|\; r_n \in I \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

und der Restklassenring $R[X]/I[X]$ ist isomorph zum Polynomring $(R/I)[X]$.

(b) Die Einheitengruppe des Polynomrings $R[X]$ ist

$$(R[X])^\times \; = \; \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} r_n X^n \in R[X] \;\middle|\; r_0 \in R^\times,\; r_n \text{ nilpotent } \forall n > 0 \right\},$$

wobei $r \in R$ *nilpotent* genannt wird, wenn $r^s = 0$ für hinreichend große $s \in \mathbb{N}$ gilt.

(je 2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei R ein vom Nullring verschiedener Ring und $\mathfrak{m} = R \setminus R^\times$. Zeige:

(a) Jedes echte Ideal in R ist in $\mathfrak{m}$ enthalten.

(b) Liegt für jedes $r \in R$ entweder r oder $1 - r$ in $R^\times$, so ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal in R.

(c) Ist jedes $r \in \mathfrak{m}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal in R.

(d) Ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal in R, so ist $R/\mathfrak{m}$ ein Schiefkörper.

(je 1 Punkt)

Abgabe: Donnerstag, 7. Dezember 2017, bis 14 Uhr in die Postfächer der TutorInnen in V3-126.