DARSTELLUNGSTHEORIE
1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Sei Λ ein Ring. Setze $\overline{\Lambda} = \Lambda/J(\Lambda)$ und schreibe $\bar{x}$ für die Restklasse $x + J(\Lambda) \in \overline{\Lambda}$ mit $x \in \Lambda$.

Aufgabe 1. Es gelten folgende Implikationen (s. Lams *A First Course in Noncommutative Rings*):

Λ endlichdimensionale Algebra über einem Körper
$\Rightarrow$ Λ Artinalgebra
$\Rightarrow$ Λ artinsch
$\Rightarrow$ Λ einseitig artinsch
$\Rightarrow$ Λ semiprimär (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ nilpotent)
$\Rightarrow$ Λ perfekt (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ T-nilpotent)
$\Rightarrow$ Λ einseitig perfekt (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ einseitig T-nilpotent)
$\Rightarrow$ Λ semiperfekt $\big($d.h. semilokal mit $\{e \in \Lambda$ idempotent$\} \twoheadrightarrow \{\bar{e} \in \overline{\Lambda}$ idempotent$\}$ surjektiv$\big)$
$\Rightarrow$ Λ semilokal (d.h. $\overline{\Lambda}$ halbeinfach)

Finde (selbstständig oder in der Literatur) für jede der obenstehenden Implikationen ein Beispiel, das aufzeigt, warum die jeweilige Umkehrung im allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 2. Beweise für Idempotente $e \in \Lambda$:

(a) $J(e\Lambda e) = eJ(\Lambda)e$.
(b) $e\Lambda e/J(e\Lambda e) \cong \bar{e}\overline{\Lambda}\bar{e}$.
(c) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:
  (i) Der Λ-Modul $e\Lambda$ ist lokal.
  (ii) Der Ring $e\Lambda e$ ist lokal.
  (iii) Der $\overline{\Lambda}$-Modul $\bar{e}\overline{\Lambda}$ ist einfach.
  (iv) Der Ring $\bar{e}\overline{\Lambda}\bar{e}$ ist ein Schiefkörper.

Hat das Idempotente $e \in \Lambda$ die Eigenschaften (i)–(iv), so wird es *lokal* genannt. Folgere nun:

(d) Ist e lokal, so ist die kanonische Projektion $e\Lambda \twoheadrightarrow \bar{e}\overline{\Lambda}$ von Λ-Moduln eine projektive Decke.

Hinweis für (d): Nutze Lemma 1.2.6 oder argumentiere ähnlich wie im Beweis von Theorem 2 in *3.14 Envelopes and covers* aus Bill Crawley-Boevey's Vorlesung Noncommutative Algebra 1.

Abgabe: 24. Oktober 2019 bis 14 Uhr in Postfach 30.

Aufgabe 3. Für Idempotente $e, f \in \Lambda$ schreibe $e \cong f$, wenn es $x \in e\Lambda f$ und $y \in f\Lambda e$ mit $e = xy$ und $f = yx$ gibt, und schreibe $e \sim f$, wenn es $u \in \Lambda^\times$ mit $f = ueu^{-1}$ gibt.

Zeige $e \sim f \Rightarrow e \cong f$ und für semiperfektes Λ auch die Umkehrung dieser Implikation.

Aufgabe 4. Beweise für semiperfekte Ringe Λ die Bijektivität folgender Zuordnungen:

$$\begin{array}{ccc}
e & \{\text{lokale Idempotente in } \Lambda\}/_{\cong} & \\
\big\downarrow & \big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & \\
e\Lambda & \{\text{unzerlegbare projektive } \Lambda\text{-Moduln}\}/_{\cong} & P \\
& \big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & \big\downarrow \\
& \{\text{einfache } \Lambda\text{-Moduln}\}/_{\cong} & P/\operatorname{rad}(P)
\end{array}$$

Hinweis: Wende den Satz von Artin–Wedderburn auf $\overline{\Lambda}$ an.