

DARSTELLUNGSTHEORIE

1. ÜBUNGSBLATT

HENNING KRAUSE
JAN GEUENICH

Sei Λ ein Ring. Setze $\bar{\Lambda} = \Lambda/J(\Lambda)$ und schreibe \bar{x} für die Restklasse $x + J(\Lambda) \in \bar{\Lambda}$ mit $x \in \Lambda$.

Aufgabe 1. Es gelten folgende Implikationen (s. Lams *A First Course in Noncommutative Rings*):

- Λ endlichdimensionale Algebra über einem Körper
- $\Rightarrow \Lambda$ Artinalgebra
- $\Rightarrow \Lambda$ artinsch
- $\Rightarrow \Lambda$ einseitig artinsch
- $\Rightarrow \Lambda$ semiprimär (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ nilpotent)
- $\Rightarrow \Lambda$ perfekt (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ T-nilpotent)
- $\Rightarrow \Lambda$ einseitig perfekt (d.h. semilokal mit $J(\Lambda)$ einseitig T-nilpotent)
- $\Rightarrow \Lambda$ semiperfekt (d.h. semilokal mit $\{e \in \Lambda \text{ idempotent}\} \rightarrow \{\bar{e} \in \bar{\Lambda} \text{ idempotent}\}$ surjektiv)
- $\Rightarrow \Lambda$ semilokal (d.h. $\bar{\Lambda}$ halbeinfach)

Finde (selbstständig oder in der Literatur) für jede der obenstehenden Implikationen ein Beispiel, das aufzeigt, warum die jeweilige Umkehrung im allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 2. Beweise für Idempotente $e \in \Lambda$:

- (a) $J(e\Lambda e) = eJ(\Lambda)e$.
- (b) $e\Lambda e/J(e\Lambda e) \cong \bar{e}\bar{\Lambda}\bar{e}$.
- (c) Folgende Eigenschaften sind äquivalent:
 - (i) Der Λ -Modul $e\Lambda$ ist lokal.
 - (ii) Der Ring $e\Lambda e$ ist lokal.
 - (iii) Der $\bar{\Lambda}$ -Modul $\bar{e}\bar{\Lambda}$ ist einfach.
 - (iv) Der Ring $\bar{e}\bar{\Lambda}\bar{e}$ ist ein Schiefkörper.

Hat das Idempotente $e \in \Lambda$ die Eigenschaften (i)–(iv), so wird es *lokal* genannt. Folgere nun:

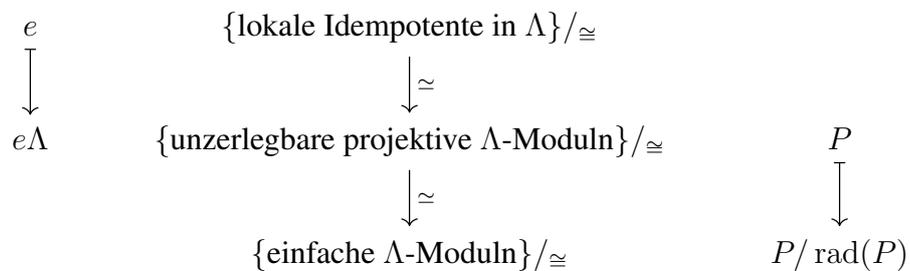
- (d) Ist e lokal, so ist die kanonische Projektion $e\Lambda \rightarrow \bar{e}\bar{\Lambda}$ von Λ -Moduln eine projektive Decke.

Hinweis für (d): Nutze Lemma 1.2.6 oder argumentiere ähnlich wie im Beweis von Theorem 2 in 3.14 *Envelopes and covers* aus Bill Crawley-Boevey's Vorlesung [Noncommutative Algebra 1](#).

Aufgabe 3. Für Idempotente $e, f \in \Lambda$ schreibe $e \cong f$, wenn es $x \in e\Lambda f$ und $y \in f\Lambda e$ mit $e = xy$ und $f = yx$ gibt, und schreibe $e \sim f$, wenn es $u \in \Lambda^\times$ mit $f = ueu^{-1}$ gibt.

Zeige $e \sim f \Rightarrow e \cong f$ und für semiperfektes Λ auch die Umkehrung dieser Implikation.

Aufgabe 4. Beweise für semiperfekte Ringe Λ die Bijektivität folgender Zuordnungen:



Hinweis: Wende den Satz von Artin–Wedderburn auf $\overline{\Lambda}$ an.