GRUPPEN UND SYMMETRIEN
3. PRÄSENZBLATT

JAN GEUENICH
JULIA SAUTER

Aufgabe PB 3.1 Es sei G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n. Dann operiert G in natürlicher Weise auf der Menge $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Für eine endliche Menge F von "Farben" wurde in der letzten Vorlesung vor Weihnachten folgende Formel bewiesen:

$$|G \setminus \mathrm{Abb}(X, F)| \;=\; Z_G(|F|, |F|, \dots, |F|)$$

Sei nun $n = 5$.

(a) Bestimmen Sie mit obiger Formel die Anzahl $|G \setminus \mathrm{Abb}(X, F)|$ als Polynom in $|F|$ sowohl für die zyklische Gruppe $G = C_5$ als auch für die Diedergruppe $G = D_5$.

(b) Bestimmen Sie nochmals – aber jetzt nicht mit obiger Formel sondern mit dem Lemma von Burnside – die Anzahl $|G \setminus \mathrm{Abb}(X, F)|$ sowohl für $G = C_5$ als auch für $G = D_5$.

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (a) und (b) miteinander.

(d) Wie viele bis auf Drehungen (bzw. bis auf Drehungen und Spiegelungen) unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Perlen einer fünfperligen Kette mit drei Farben einzufärben? Nutzen Sie zu Beantwortung Ihre Ergebnisse aus den vorherigen Aufgabenteilen.

Aufgabe PB 3.2 Wie viele bis auf Symmetrie verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Flächen des Tetraeders pink, gelb und türkis zu färben, sodass genau eine, genau zwei, genau drei bzw. genau vier der Flächen türkis sind?

Um das Tetraeder als Spielwürfel zu nutzen, sollen die Zahlen von eins bis vier auf seinen Flächen verteilt werden. Auf wie viele bis auf Symmetrie unterschiedliche Weisen ist das möglich?