Julia Sauter
Jan Geuenich

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

WS 2019/2020 Probeklausur 22.01.2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Gesamt	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie Schreibutensilien und Taschenrechner.
Diese Klausur enthält 14 Seiten. Überprüfen Sie dies. Auf jedes Blatt tragen Sie bitte Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer ein. Lösen Sie die Klammerung der Seiten nicht auf. Ihre Lösungen tragen Sie bitte auf den Seiten der Aufgabenstellung ein. Für Rechnungen und Vorüberlegungen verwenden Sie das Konzeptpapier der letzten Blätter (Vorder- und Rückseite). Falls Sie weiteres Papier benötigen, fragen Sie die Klausuraufsicht. Bitte verwenden Sie weder Blei- noch Rotstift.
Bitte geben Sie knappe aber zugleich hinreichend ausführliche Begründungen für Ihre Ergebnisse. Ihr Lösungsweg muss nachvollziehbar sein. Sofern nicht anders angegeben, dürfen Sie dabei auf Ergebnisse aus der Vorlesung verweisen, sollten diese jedoch klar benennen. Verweise auf Übungsaufgaben sind nicht zulässig.

Veröffentlichung des Klausurergebnisses: Kreuzen Sie bitte an, wenn Sie der Veröffentlichung Ihres Ergebnisses (ohne Namen unter Angabe der Matrikelnummer) auf der Vorlesungswebseite zustimmen. ☐

Falls Sie nicht im WS 2019/2020 den Leistungsnachweis zur Vorlesung Ausgewählte Kapitel der Mathematik erbracht haben: In welcher Veranstaltung haben Sie den Leistungsnachweis erbracht? Semester, Dozent:

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Es sei G eine Gruppe und $x \in G$. Wir definieren

$$U := \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}\,.$$

Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G ist.

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (4+4 Punkte):

(a) Finden Sie $r \in \{0, 1, \ldots, 32\}$, so dass gilt:

$$2^{2019} \equiv r \pmod{33}$$

(b) Finden Sie das Inverse von $\overline{17}$ in $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^{\times}$.

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (3+5 Punkte):

Wir betrachten die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ und die Untergruppe $U = \langle \overline{4} \rangle$.

(a) Berechnen Sie den Index $[G\colon U]$ von U in G.

(b) Finden Sie $[G\colon U]$ paarweise verschiedene Linksnebenklassen von U in G.

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (2+2+4 Punkte):

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, f(\overline{x}) = \overline{4x+1}$. Nun wählen wir eine Bijektion von Mengen $\{1, 2, \ldots, 11\} \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, k \mapsto \overline{k}$. Unter dieser Identifikation entspricht f einem Element in S_{11}.

(a) Schreiben Sie f als Produkt disjunkter Zykel.
(b) Berechnen Sie das Vorzeichen von f.
(c) Schreiben Sie f^2 als Produkt disjunkter Zykel und beweisen Sie, dass f und f^2 konjugiert zueinander sind.

Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Die Gruppe S_5 operiert diagonal auf der Menge $X = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$. Wir betrachten nun die Einschränkung dieser Operation auf die Untergruppe $G = \langle (1,4,3) \rangle$ von S_5, d.h. $g * (x,y) := (g(x), g(y))$ für $x, y \in \{1,2,3,4,5\}, g \in G$. Berechnen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation von G.

Hinweis: Sie können alle Bahnen hinschreiben oder das Lemma von Burnside anwenden.

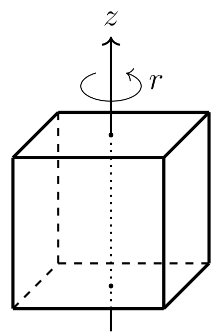
Name, Vorname:
Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (3+5 Punkte):

Wir nummerieren die sechs Flächen des Würfels mit $1, \dots, 6$, wobei wir die obere mit 5, die untere mit 6 und die anderen vier wie in folgendem Netz benennen:

5			
1	2	3	4
			6

Nun betrachten wir die Operation der Gruppe $G = \langle r \rangle$ auf $X = \{1, \dots, 6\}$, wobei r die im folgenden Bild dargestellte Drehung um 90° um die z-Achse ist:



Das heißt in Zyklenschreibweise ist $r = (1,2,3,4) \circ (5) \circ (6) \in S_6$.
Wir färben nun die Flächen des Würfels in schwarz und weiß ein.

(a) Zeichnen Sie alle Färbungen, die bis auf G-Operation genau eine schwarze Fläche haben.

(b) Bestimmen Sie für jedes $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ die Anzahl der Färbungen mit genau k schwarzen Flächen bis auf G-Operation.

Hinweis: Benutzen Sie Polyas Abzählsatz. In diesem Fall ist der Zyklenzeiger von G gegeben als $Z_G(s_1, s_2, \dots, s_6) = \frac{1}{4}(s_1^6 + s_1^2 s_2^2 + 2 s_1^2 s_4)$.

Hilfestellung: $(1+x)^2(1+x^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$