

GRUPPEN UND SYMMETRIEN LÖSUNG VON TRAININGSZETTEL III

JULIA SAUTER

Aufgaben zu Nebenklassen und dem Satz von Lagrange:

Es sei $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$. Berechnen Sie den Index der Untergruppe $U = \langle \bar{2} \rangle$ und finden Sie alle Linksnebenklassen von U (d.h. insbesondere: welche gleich sind und welche verschieden).

Lösung: Es gilt $G = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{14}\}$ und $U = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2}^0 = \bar{1}, \bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{8}\}$ (hier wurde benutzt: Wegen $\bar{2}^4 = \bar{16} = \bar{1}$ und keine der kleineren Potenzen ist $\bar{1}$ folgt $\text{ord}_{(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times}(\bar{2}) = 4$). Also gilt nach dem Satz von Lagrange, dass es $\frac{|G|}{|U|} = \frac{8}{4} = 2$ verschiedene Linksnebenklassen von U in G gibt. Natürlich ist $U = \bar{1} \cdot U = \bar{2} \cdot U = \bar{4} \cdot U = \bar{8} \cdot U$ eine der beiden Linksnebenklassen. Die andere Linksnebenklasse finden wir als $\bar{7} \cdot U \neq U$, denn $\bar{7} \notin U$. Hier gilt: $\bar{7} \cdot U = \bar{11} \cdot U = \bar{13} \cdot U = \bar{14} \cdot U$, denn:

Hier geht es um die Nebenklassen der Restklassen $\overline{(-8)}, \overline{(-4)}, \overline{(-2)}, \overline{(-1)}$ - deren Inverse sind respektive $\overline{(-2)}, \overline{(-4)}, \overline{(-2)}, \overline{(-1)}$. Es gilt $\bar{k} \cdot U = \bar{\ell} \cdot U$ genau dann, wenn $\overline{k\ell^{-1}} \in U$. Da es sich um die negativen Restklassen der Restklassen aus U handelt und U eine Untergruppe ist, ist diese Bedingung für je zwei der vier erfüllt.

Aufgaben zur symmetrischen Gruppe:

(1) Gegeben sind die folgenden Permutationen in S_7

$$\sigma_1 = (2, 1) \circ (2, 3) \circ (6, 5) \circ (6, 4)$$

$$\sigma_2 = (1, 2) \circ (2, 7) \circ (3, 4) \circ (2, 3) \circ (1, 2) \circ (1, 5) \circ (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (6, 3)$$

$$\sigma_3: \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad \bar{x} \mapsto \overline{4x+1}$$

$$\sigma_4: \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad \bar{x} \mapsto \overline{2x+2}$$

(a) Berechnen Sie die Ordnung und das Vorzeichen dieser Permutationen.

Lösung: Wir schreiben alle Permutationen als Produkt disjunkter Zyklen, um die Ordnung zu berechnen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 7) \circ (3, 6) \circ (4, 5)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1, 5, 7) \circ (3, 6, 4)$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 3) \circ (2, 6, 7)$$

Die Ordnung ist das kgV der Zykellängen in diesen Faktorisierungen, somit gilt: $\text{ord}(\sigma_1) = \text{ord}(\sigma_3) = \text{ord}(\sigma_4) = 3$ und $\text{ord}(\sigma_2) = 6$.

Da Vorzeichen eines Produktes disjunkter Zyklen $z_1 \circ z_2 \circ \dots \circ z_t$ berechnet sich als $(-1)^{\sum_{i=1}^t (|z_i|-1)}$, somit gilt: $\text{sign}(\sigma_1) = \text{sign}(\sigma_3) = \text{sign}(\sigma_4) = (-1)^{2+2} = 1$ und $\text{sign}(\sigma_2) = (-1)^{2+1+1} = 1$.

- (b) Finden Sie alle Paare konjugierter Elemente unter diesen Permutationen.

Lösung: Zwei Elemente in S_n sind genau dann konjugiert, wenn sie den gleichen Zykeltyp haben. Da $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$ den gleichen Zykeltyp $[3, 3, 1]$ haben sind sie paarweise konjugiert. Der Zykeltyp von σ_2 ist $[3, 2, 2]$ und somit ist σ_2 nicht konjugiert zu einem der anderen σ_i .

- (c) Für jedes Paar konjugierter Permutationen finden Sie ein $g \in S_7$, so dass die Konjugation mit g das andere Element gibt.

Lösung: Wir schreiben die Permutationen $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$ untereinander, so dass Zyklen gleicher Länge untereinander stehen. Dann definieren wir die Abbildungen g_i als die Vorschrift, die die Zahlen in der höheren Zeile auf die darunter abzubilden, genauer: g_1 für σ_1 über σ_2 , g_2 für σ_3 über σ_4 und g_3 für σ_3 über σ_4 :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2, 5, 6, 4, 3, 7)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (2, 5, 4, 7, 3)$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (2, 4) \circ (5, 6, 7)$$

Nach Vorlesung (oder durch direktes Nachrechnen) erhält man $g_1\sigma_1g_1^{-1} = \sigma_3$, $g_2\sigma_3g_2^{-1} = \sigma_4$, $g_3\sigma_1g_3^{-1} = \sigma_4$. Natürlich erhält man auch $g_1^{-1}\sigma_3g_1 = \sigma_1$, $g_2^{-1}\sigma_4g_2 = \sigma_3$, $g_3^{-1}\sigma_4g_3 = \sigma_1$.

- (2) (a) Finden Sie alle Konjugationsklassen in S_4 und beschreiben Sie, wie viele Elemente diese haben.

Lösung: Die Konjugationsklassen sind durch die Zykeltypen beschrieben, für S_4 sind dies $[1, 1, 1, 1]$, $[2, 1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 1]$, $[4]$.

- * In der Konjugationsklasse zu $[1, 1, 1, 1]$ liegt nur die Identität.
- * In der Konjugationsklasse zu $[2, 1, 1]$ liegen genau die Transpositionen, davon gibt es $\binom{4}{2} = 6$.
- * In der Konjugationsklasse zu $[2, 2]$ liegen nur die drei Elemente $(1, 2) \circ (3, 4)$, $(1, 3) \circ (2, 4)$ und $(1, 4) \circ (2, 3)$.
- * In der Konjugationsklasse $[3, 1]$ liegen die 3-Zykel. Davon gibt es genau acht, nämlich $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 4)$ und deren Inverse $(1, 3, 2)$, $(1, 4, 2)$, $(1, 4, 3)$, $(2, 4, 3)$.
- * In der Konjugationsklasse $[4]$ leben alle Elemente $(1, i, j, k)$ mit $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$. Davon gibt es genau so viele wie verschiedene Anordnungen der drei Elemente 2, 3, 4 - also 6.

- (b) Beschreiben Sie alle möglichen Zykeltypen in S_7 und berechnen Sie die maximale Ordnung eines Elementes in S_7 .

Lösung: Die Zykeltypen für S_7 sind $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$, $[2, 1, 1, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 1]$, $[3, 1, 1, 1, 1]$, $[3, 2, 1, 1]$, $[3, 2, 2]$, $[3, 3, 1]$, $[4, 1, 1, 1]$, $[4, 2, 1]$, $[4, 3]$, $[5, 1, 1]$, $[5, 2]$, $[6, 1]$, $[7]$.

Die Ordnung aller Elemente eines Zykeltyps berechnet sich als kgV der Einträge in $[a_1, a_2, \dots, a_t]$. Damit wird die maximale Ordnung $12 = 3 \cdot 4$ genau bei allen Elementen des Zykeltyps $[4, 3]$ erreicht.

- (3) Sei D_6 die Diedergruppe erzeugt von einer Drehung r der Ordnung 6 und einer Spiegelung s . Wir fixieren die folgende Nummerierung der Elemente in D_6 :

$$g_1 = 1, g_2 = r, g_3 = r^2, \dots, g_6 = r^5, g_7 = s, g_8 = sr, g_9 = sr^2, \dots, g_{12} = sr^5$$

Mit dieser Nummerierung, erhalten wir einen injektiven Gruppenhomomorphismus $f: D_6 \rightarrow S_{12}$ gegeben durch die Abbildung, die g_i auf die Linksmultiplikation mit g_i abbildet und j mit g_j identifiziert.

- (a) Schreiben Sie $f(s)$, $f(r)$ und $f(r^3)$ in S_{12} als Produkt disjunkter Zyklen. Welche dieser drei Elemente sind konjugiert zueinander?

Lösung: $f(s) = (1, 7) \circ (2, 8) \circ (3, 9) \circ (4, 10) \circ (5, 11) \circ (6, 12)$

$f(r) = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \circ (7, 12, 11, 10, 9, 8)$

$f(r^3) = (1, 4) \circ (2, 5) \circ (3, 6) \circ (7, 10) \circ (8, 11) \circ (9, 12)$

Der Zykeltyp von $f(s)$ und $f(r^3)$ ist $[2, 2, 2, 2, 2, 2]$ und der von $f(r)$ ist $[6, 6]$, also sind nur $f(s)$ und $f(r^3)$ in S_{12} zueinander konjugiert.

- (b) Zeigen Sie, dass s und r^3 nicht konjugiert in D_6 sind.

Lösung: r^3 kommutiert mit allen anderen Elementen in D_6 , deswegen ist r^3 nur zu sich selber konjugiert und nicht zu s .