

GRUPPEN UND SYMMETRIEN

12. ÜBUNGSBLATT

JAN GEUENICH
JULIA SAUTER

Aufgabe 12.1 Der *Eulersche Polyedersatz* besagt, dass in konvexen Polyedern P die Beziehung

$$e - k + f = 2$$

gilt, wobei e , k und f die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen von P bezeichnen.

(a) Folgern Sie aus dem Eulerschen Polyedersatz die Ungleichung

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

für reguläre Polyeder, bei denen an jeder Ecke genau m n -Ecke aufeinandertreffen.

Hinweis: Bestimmen Sie sowohl e als auch f in Abhängigkeit von k und setzen Sie die so erhaltenen Ausdrücke für e und f in den Polyedersatz ein.

(b) Überprüfen Sie den Eulerschen Polyedersatz an einem von Ihnen gewählten Polyeder.

Aufgabe 12.2 Diese Aufgabe beschäftigt sich nun mit der Gleichung

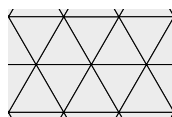
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

(a) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n und m , die die Gleichung lösen.

Hinweis: Bringen Sie die Gleichung in die Form $(n - 2)(m - 2) = 4$. Als Menge aller möglichen Lösungen (n, m) sollten Sie dann $\{(4, 4), (3, 6), (6, 3)\}$ erhalten.

(b) Geben Sie für jede Lösung (n, m) eine Parkettierung der Ebene durch reguläre n -Ecke an, bei der an jeder Ecke m Flächen zusammenstoßen.

Die Lösung $(n, m) = (3, 6)$ entspricht beispielsweise der Parkettierung der Ebene durch gleichseitige Dreiecke, wo an jeder Ecke sechs Dreiecke zusammenstoßen:



Aufgabe 12.3 Die Flächen eines Tetraeders sollen jeweils rot, gelb oder blau eingefärbt werden. Bestimmen Sie mithilfe des Pólyaschen Abzählsatzes die Anzahl der verschiedenen Färbungen mit mindestens zwei blauen und höchstens einer roten Fläche. Zwei Färbungen gelten hierbei als verschieden, wenn sie nicht durch eine Symmetrie des Tetraeders ineinander überführbar sind.

Aufgabe 12.4 Die Flächen eines Würfels sollen so mit den verschiedenen Zahlen von eins bis sechs beschriftet werden, dass die Summe zweier gegenüberliegender Zahlen immer sieben ergibt. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür bis auf Symmetrie?

Und nun die entsprechende Fragestellung für das Dodekaeder: Wie viele Beschriftungen seiner Seitenflächen mit den verschiedenen Zahlen von eins bis zwölf gibt es bis auf Symmetrie, sodass die Summe gegenüberliegender Zahlen immer dieselbe ist? Welchen Wert hat diese Summe?

Abgabe bis Donnerstag, den 16. Januar 2020, um 12 Uhr in die Postfächer Ihrer Tutor*innen.

BASTELVORLAGE IKOSAEDER

