Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 10.4.2024

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2024

Übungsblatt 1

Vorbemerkung: Wiederholen Sie den Teil der Vorlesung „LAP" über Gruppen.

(1) Denken Sie sich 5 Beispiele von Gruppen aus, nicht alle endlich, nicht alle abelsch. Benutzen Sie verschiedene Präsentationen (z.B. abstrakt, algebraisch, geometrisch, etc.) **(2 Punkte)**

(2) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und $H \subseteq G$.
Zeigen Sie: H ist Untergruppe von $G \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H$ für alle $x, y \in H$.
(2 Punkte)

(3) Erstellen Sie ein vollständiges Diagramm aller Untergruppen von D_4 ($\rightarrow$ „Verband").

Hinweis: Es gibt insgesamt 10 verschiedene Untergruppen. Wieviele gibt es bis auf Isomorphie? **(2 Punkte)**

(4) Zeigen Sie:

$$V(x_1, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)\,.$$

Benutzen Sie dies, um nachzuweisen, dass

$$\mathrm{sgn} : S_n \to C_2, \quad \pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi) = V(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})/V(x_1, \ldots, x_n)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. **(3 Punkte)**

Abgabe bis Donnerstag, 18.4.2024, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!