

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2024

Übungsblatt 3

- (9) Sei G eine Gruppe. Wir bilden die Menge K der sogenannten Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ von Elementen $a, b \in G$. Dann bildet $H := \langle K \rangle$ einen Normalteiler in G .

Beweisen Sie dies und berechnen Sie zusätzlich die Kommutatorgruppe für 3 Beispiele Ihrer Wahl (davon sei höchstens eines abelsch!).

Illustrieren Sie anhand eines einfachen Beispiels, warum man die Erzeugungsklammer bei der Definition der Kommutatorgruppe nicht weglassen kann.

(2 Punkte)

- (10) Es bezeichne $C_n (n > 0)$ die zyklische Gruppe der Ordnung n . Zeigen Sie (unter Verwendung von elementaren Methoden) die folgenden Aussagen:

(a) Wenn p, q teilerfremd sind, dann ist $C_{p \cdot q} \simeq C_p \times C_q$.

(b) Jede Gruppe der Ordnung p^2 (p prim) ist abelsch, und es treten nur die Typen $C_p \times C_p$ und C_{p^2} auf.

Hinweis: Es erleichtert die Rechnung, wenn man die kleineren zyklischen Gruppen geeignet als Untergruppen auffasst. Überlegen Sie sich, wie eine geeignete Einbettung aussehen kann.

(2 Punkte)

- (11) Es sei G eine abelsche Gruppe, und H Untergruppe von G .

Ist dann G/H eine Gruppe? Falls ja, warum? Überlegen Sie sich unter anderem, wie die Gruppenoperation auszusehen hat.

Ist G/H abelsch? Zeigen oder widerlegen Sie dies (mit Beweis). **(2 Punkte)**

- (12) Geben Sie 4 Beispiele von Gruppen G mit Normalteiler N . Bestimmen Sie zu ihrer Wahl jeweils die Faktorgruppe G/N .

(Wie immer sollen die Gruppen nicht alle abelsch, nicht alle endlich sein).

(2 Punkte)