Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 9.5. 2024

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2024

Übungsblatt 5

(17) Die Euklidische Gruppe $E(n)$ hat zwei wichtigen Untergruppen: Die Gruppe aller Translationen $T(n)$, und die Gruppe, die den Koordinatenursprung erhält. Zeigen Sie, dass $T(n)$ ein Normalteiler ist. Schließen Sie daraus, dass sich $E(n)$ als das semidirekte Produkt dieser Gruppen schreiben lässt.

(2 Punkte)

(18) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Wir kennen bereits die *kanonische Projektion*

$$\gamma : G \longrightarrow G/H, \quad \text{def. durch} \;\; g \longmapsto \gamma(g) = g \cdot H\,,$$

allerdings nur als Abbildung zwischen Mengen. Zeigen Sie, dass γ sogar einen Homomorphismus definiert, mit $\mathrm{Kern}(\gamma) = H$.

Sei nun G' eine weitere Gruppe und $\phi : G \to G'$ ein beliebiger Homomorphismus mit $\mathrm{Kern}(\phi) =: H'$. Dann ist $\mathrm{Im}(\phi)$ eine Gruppe, und durch die Vorschrift

$$\mu : G/H' \longrightarrow \phi(G), \quad \text{def. durch} \;\; g \cdot H' \longmapsto \mu(g \cdot H') = \phi(g)\,,$$

ist ein Isomorphismus gegeben (d.h. $G/\mathrm{Kern}(\phi) \simeq \mathrm{Im}(\phi)$).

(2 Punkte)

(19) Wir schreiben die Diedergruppe D_n in Generatorschreibweise,

$$D_n = \big\langle \{ x^k y^\ell \,:\, x^n = e, y^2 = e, (xy)^2 = e \} \big\rangle\,.$$

Zeigen Sie, dass es Untergruppen H_1, H_2 in D_n gibt mit

$$H_1 \simeq C_2,\;\; H_2 \simeq C_n\,,$$

wobei H_2 sogar Normalteiler ist. Rechnen Sie nach, dass D_n das semidirekte Produkt dieser Gruppen ist, d.h.

$$D_n \simeq C_2 \ltimes C_n\,.$$

(2 Punkte)

(20) Jede Kante des Quadrats sei durch einen Widerstand mit $1\,\Omega$ ersetzt. Was ist dann der Widerstand zwischen 2 Ecken (es gibt bis auf Symmetrie 2 Fälle)?

Nun betrachten wir den Widerstandswürfel in drei Dimensionen, mit $1\,\Omega$ entlang jeder Kante. Was ist jetzt der Widerstand zwischen 2 antipodalen Ecken?

Hinweis: Nutzen Sie eine Symmetrieüberlegung zu den Äquipotentialpunkten.

(2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 16.5.2020, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!