Michael Baake
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 16. 5. 2024

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemmester 2024

Übungsblatt 6

(21) (a) Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ein Gitter, mit Basis $\{b_1, \dots, b_d\}$, also $\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_d$. Sei ferner $T \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$T\,\Gamma \subseteq \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \det(T - x \cdot \mathbb{1}) \in \mathbb{Z}[x]$$

(dabei ist $\mathbb{Z}[x]$ der Ring der Polynome in einer Veränderlichen x mit ganzzahligen Koeffizienten).

(b) Leiten Sie hieraus ab, dass es keine 5-zählige Drehung geben kann, die ein Gitter im $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst abbildet.

Hinweis: Wie sieht das characteristische Polynom für n-zählige Drehung aus?

(2 Punkte)

(22) Konstruieren Sie Darstellungen von Gruppen für 5 Beispiele (nicht alle abelsch, nicht alle vom Grad 1, nicht nur für endliche Gruppen).

(2.5 Punkte)

(23) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum (ein vollständiger, unitärer Raum), mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Sei G eine endliche Gruppe und U eine Darstellung von G auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x|y\rangle \quad := \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big(U(g)x \mid U(g)y \big)$$

wieder ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ liefert, das G-invariant ist.

(4 Punkte)

(24) Sei $G = S_n$, und $U(\pi) := (\delta_{i,\pi(j)})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Dies definiert eine Darstellung von S_n vom Grad n.

(b) Die Darstellung ist reduzibel.

Versuchen Sie, irreduzible Anteile zu bestimmen (es braucht nicht gezeigt werden, dass alle Anteile gefunden wurden).

Hinweis: Es gibt einen eindimensionalen invarianten Unterraum.

(2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 23. 5. 2024, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!