Universität Bielefeld

Material für die (ausfallende) Stunde am 9.5.'24:

(1) Struktursatz für endl. erzeugte abelsche Gruppen (2 Formulierungen)

(2) Klassifikation der endl. Untergruppen von SO(3), mit Tabelle

- Machen Sie sich die Aussagen klar, betrachten Sie Beispiele

- Werfen Sie einen Blick auf die Beweise (bzw. Beweisskizzen)

Die Struktur abelscher Gruppen

<u>Def.:</u> Das n-fache direkte Produkt $\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$ heißt <u>freie abelsche Gruppe</u> vom Rang n. Die Elemente sind von der Form $g = m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n$, x_i der Erzeuger der i-ten Komp. (also $x_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$), und $\sum m_i x_i = 0 \iff m_1 = \ldots = m_n = 0$. (Additive Schreibw.)

<u>Bem.:</u>
- Man kann auch abstrakt definieren, und dann zeigen, daß – bis auf Isomorphie – nur $\mathbb{Z}^n$ mögl. ist.
- <u>Rang</u> ist wohldefiniert, jede Basis hat dieselbe Zahl von Elementen. (Bild: Gitter!)

<u>Satz:</u> Eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe vom Rang n ist entweder $= \{0\}$ oder aber frei und vom Rang $1 \le m \le n$.

<u>Bew.:</u> (Fraleigh, Algebra, S. 221 f.) s. S. 23a.
<u>Bild:</u> Bilde Untergitter – Resultat klar!

<u>Def.:</u> Eine abelsche Gruppe heißt <u>endlich erzeugt</u>, wenn es eine endl. Basis gibt, sodaß jedes Element als Linearkombination darin geschrieben werden kann.

Ex. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}^5$: endl. erzeugt, aber nicht frei

$\mathbb{Q}$: <u>nicht</u> endl. erzeugt!

Bew.:

Die Untergruppen von $G = \mathbb{Z}$ sind $\{0\}$ und $m\mathbb{Z}$, mit $m \in \mathbb{N}$, also wahr für $n = 1$.

Sei H eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$, und $p: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Projektion auf die erste Komp. (also $p(m_1, \dots, m_n) = m_1$). Sei $H_1 = \mathrm{kern}(p|_H)$, somit H_1 UG von $\langle e_2, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$, und (per Ind.) frei vom Rang $\leq n-1$.

Nun ex. eine UG $C_1 \subseteq \mathbb{Z}e_1$, nämlich $\mathrm{Bild}(p|_H)$, so dass $H = C_1 \oplus H_1$ (über $\mathbb{Q}$ klar aus LAP, übertragen auf den Ring per "Freiheitsbedingung"; vgl. Lang).

Dabei $p(H)$ UG von $\mathbb{Z}e_1$, also $\{0\}$ oder $\simeq \mathbb{Z}$ (s.o.), also ist H frei, mit Rang $\leq n$.

Bem.: G endl. erzeugt

$\Rightarrow$ $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ $\Rightarrow$ $\{a_1, \dots, a_n\}$ Basis von $\mathbb{Q}^n$

Falls außerdem $G = \langle b_1, \dots, b_r \rangle_{\mathbb{Z}}$, so ist $\{b_1, \dots, b_r\}$ Basis von $\mathbb{Q}^r$ $\Rightarrow$ $r = n$ (!)

Bem.: Man kann (mit etwas mehr Aufwand) auch allg. freie abelsche Gruppen betrachten (vgl. Lang, Algebra, S. 40 f.).

<u>Hauptsatz:</u> Jede endl. erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe der Form

$$\boxed{\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_r} \times \mathbb{Z}^n} = T \times \mathbb{Z}^n$$

mit $n \geq 0$ und $m_i \mid m_{i+1}$ $(1 \leq i \leq r-1)$.
T heißt dabei <u>Torsionsgruppe.</u>
$T \times \mathbb{Z}^n$ wiederum ist isomorph zu einer Gruppe der Form

$$\left(\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_m)^{r_m}}\right) \times \mathbb{Z}^n , \quad p_i \text{ prim.}$$

Dabei ist n (die Betti-Zahl von G) eindeutig bestimmt, ebenso wie die Primpotenzen $(p_i)^{r_i}$.

<u>Bew.:</u> konstruktiv, mittels geeigneter Homomorphismen s. Fraleigh, Kap. 3.6, S. 218 ff; oder Lang, Kap. I.8 →

Die Bedeutung dieses Satzes kann kaum überschätzt werden! In der Physik kommt er über Homologie-theorie vor – also u.a. in der Feldtheorie.

Für <u>nicht</u> endl. erz. Gruppen gilt er <u>nicht</u>!

Ex. $SO(2,\mathbb{Q}) \simeq (C_2 \times C_2) \times \mathbb{Z}^{(\infty\text{s.})}$

aber $\mathbb{Q}$ selber ist <u>nicht</u> von dieser Form!

<u>Def.:</u> Eine Gruppe heißt <u>torsionsfrei</u>, wenn kein Element außer e_G von endl. Ordnung ist.

<u>Satz:</u> Sei G abelsch, endl. erzeugt und torsionsfrei. Dann ist G <u>frei</u>.

<u>Bew.:</u> Klar nach obigem Resultat, geht aber direkt wie folgt: Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die max. Teilmenge der Generatoren so dass $m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0 \Rightarrow m_1 = \ldots = m_n = 0$
(wobei $n \geq 1$ für $G \neq \{0\}$, was angenommen sei).
Die UG $B = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist also frei. Falls $B = G$, sind wir fertig. Sonst ex. ein Gen. y mit $my + m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0$, wobei $m \neq 0$ (sonst $m_1 = \ldots = m_n = 0$), so dass $my \in B$, und analog für alle anderen Generatoren.
$\Rightarrow \exists\, \tilde{m}$: $\tilde{m}G$ ist UG von B, also frei $\overset{(!)}{\Rightarrow}$ G frei. $\square$

<u>Satz:</u> Sei G abelsch, endl. erzeugt, und sei $T = \{g \in G \mid g \text{ hat endl. Ordnung}\}$.
Dann ist T endl. abelsche Gruppe, G/T ist frei, und es ex. $H < G$, so dass $G = T \oplus H$.

<u>Bew.:</u> $g \in T \Rightarrow g^m \in T \curvearrowright$ Gruppeneigenschaft klar, Endlichkeit folgt aus endl. Erzeugung (G ist Bild von $\mathbb{Z}^n$ unter Hom., wenn $n = \#$ Gen.).
Sei $T = \operatorname{kern}(\psi)$, z.B. $\psi: g \mapsto g^N$ mit $N = |T|$,
also $G/T \simeq \operatorname{Bild}(\psi)$, was torsionsfrei ist, also frei.
Rest klar (s.o., vgl. Lang, Lemma I.7.2)

Endliche Untergruppen von $SO(3)$

$O(n) =. \{ A \mid AA^t = \mathbb{1} \}$; $\quad SO(n) = \ker(\det)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$

$\Rightarrow \quad O(n) / SO(n) \simeq \mathbb{Z}_2$

Prop.: Sei $A \in SO(3)$. Dann ex. ein v mit $Av = v$, und in einer ON-Basis $\{v, e_1, e_2\}$ hat A die Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad ; \quad v \text{ heißt } \underline{\text{Drehachse}}.$$

Bew.: Übung. (Satz von Euler, s. LAP)

- Sei nun $G \subset SO(3)$ eine endl. Untergruppe.
Sei v eine Drehachse für ein $g \in G$, also $gv = v$, $g \neq e$.
und $G^{(v)} = \{ h \in G \mid hv = v \}$ (Untergruppe von G!).
$\rightsquigarrow$ Alle mit Drehwinkel $\vartheta_1, \dots, \vartheta_r$.
Sei ϑ der minimale Drehwinkel (muß ex.!).
$\Rightarrow \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, sonst ist $m \cdot \vartheta \in (2\pi, 2\pi + \vartheta)$, $\lightning$
$\Rightarrow \quad G^{(v)} = \{ h(\vartheta)^m \mid m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \} \simeq C_n \quad \Rightarrow v$ ist n-zählig.

- Sei S die Menge aller Durchstoßungspunkte aller Drehachsen (mit S^2) (für $g \neq e$). Dann ist S ein G-Raum! Denn:
$\alpha \in S \overset{g \in G}{\Rightarrow} g\alpha \in S$, denn $h\alpha = \alpha$ impliziert
$(g h g^{-1}) g \alpha = g h \alpha = g\alpha$. Falls α n-zählig ist, so auch $g\alpha$.

$\rightsquigarrow$ Zerlege S in Orbits $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$, mit zug. Zähligkeiten $n_1, \dots, n_k$.

Prop.: $$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2 - \frac{2}{|G|}}$$ (Diophantische Gleichung nach F. Klein)

Bew.: Setze $P = \{(\alpha, g) \mid \alpha \in S, g \in G;\ g \neq e,\ g\alpha = \alpha\}$

Pro $g \in G$ ex. $\underline{2}$ Durchstoßungspunkte α auf S^2, also:

$$|P| = 2(|G| - 1). = |G|\left(2 - \frac{2}{|G|}\right)$$

Aber: Für $\alpha \in O_j$ ex. $(n_j - 1)$ versch. $g \in G \setminus \{e\}$ mit $g\alpha = \alpha$, also:

$$|P| = \sum_{i=1}^{k} |O_i| \cdot (n_i - 1) \qquad (*)$$

Da O_i ein Orbit ist, mit Isotropiegruppe $\simeq Z_{n_i}$, muß gelten:

$$|O_i| = |G| / |Z_{n_i}| = |G| / n_i$$

und:

$$(*) \Rightarrow \quad |P| = \sum_{i=1}^{k} \frac{|G|}{n_i} (n_i - 1). = |G| \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

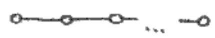
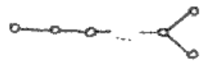
Also haben wir 2 Gl. für $\frac{|P|}{|G|}$, Gleichsetzen liefert die Behauptung! $\square$

Weitere <u>Strategie</u>:

(1) Bestimme die Lösungen der Gl. (notw. Bed.!)

(2) Prüfe, ob dem eine Gruppe zugehört.

Antwort:

k	n_1	n_2	n_3	$\lvert G\rvert$	Name	Symbol	
2	n	n	–	n	C_n		$(n \geq 1)$ (n=1 ist ein Grenzfall)
3	2	2	n	$2n$	D_n		$(n \geq 4)$ $+ D_2 \simeq C_2 \times C_2$ $+ D_3$
3	2	3	3	12	T		
3	2	3	4	24	C		
3	2	3	5	60	Y		

Übung: Zeige, daß dies alle Lösungen sind!

Satz: Die endl. Untergruppen von $SO(3)$ sind konjugiert zu einer der folgenden Gruppen:

(i) C_n $(n \geq 1)$

(ii) D_n $(n \geq 2)$ → Symm. des n-zähligen Prismas

(iii) T, C, Y → Platonische Körper.

Bem.: $Y \simeq A_5$ ist einfach. (→ Zitat Hamermesh!)