Weitere Anwendungen

Satz: Sei p Primzahl, und G eine Gruppe mit $|G| = p^2$. Dann ist G abelsch.

Bew.: $d^{(\alpha)} \mid |G| \quad \Rightarrow \quad d^{(\alpha)} = 1, p, p^2$.

Aber:
$$\sum_\alpha \left(d^{(\alpha)}\right)^2 = p^2$$

Da nun ein $d^{(\alpha)} = 1$ (triv. Darst.!),
müssen dann gleich alle $d^{(\alpha)} = 1$ sein $\Rightarrow$ G abelsch.

$\square$

Satz: Seien p, q Primzahlen, $p < q$, $q \not\equiv 1 \pmod p$.
Falls $|G| = p \cdot q$, so ist G abelsch.

Bew.: $|G| = p \cdot q$. $\quad d^{(\alpha)} \mid |G|$, $\left(d^{(\alpha)}\right)^2 < |G|$,
also muss $d^{(\alpha)} = 1$ oder $d^{(\alpha)} = p$ gelten.

$$\Rightarrow \quad p \cdot q = n \cdot p^2 + m \cdot 1, \quad \text{mit } m \geq 1.$$

$$\Rightarrow \quad p \mid m \mid |G| = p \cdot q \qquad (m = \#\{1D \text{ Darst.}\}\ ?)$$

$\overset{m \neq 0}{\Rightarrow}$ entweder $m = p$ oder $m = p \cdot q$

Falls $m = p$, so folgt $q = n \cdot p + 1$, also $q \equiv 1 \pmod p$,
im Widerspruch zur Annahme!

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Satz: (Burnside) Falls $|G|$ ungerade, ist:
$$|G| \equiv \text{Klassenzahl} \pmod{16}$$
(ohne Bew.)

Reelle Darstellungen

Def.: Sei $U^{(\alpha)}$ eine unitäre irrep von G.

- $\bar{U}^{(\alpha)}$ ist die konjugierte Darstellung
- falls $U^{(\alpha)} \sim \bar{U}^{(\alpha)}$, so heißt $U^{(\alpha)}$ selbst-konjugiert.
- falls $U^{(\alpha)} \not\sim \bar{U}^{(\alpha)}$, so heißt $U^{(\alpha)}$ komplex.

Falls $U^{(\alpha)}$ selbst-konjugiert, ist $U^{(\alpha)}$ entweder reell (also zu einer reellen D. äquivalent), oder quaternionisch (falls nicht).

Ex $\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = -\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k} = -1$

$$\underline{i} \leftrightarrow i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} \leftrightarrow i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{k} \leftrightarrow i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann: $$\bar{U}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Aber: Es gibt keinen Basiswechsel durch den alle 3 Matrizen glz. reell werden!

Bew.: Übung.
Beachte: $\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ bilden Basis
$\rightsquigarrow$ Führe Widerspruchsbeweis!

Satz: (Frobenius & Schur)
Sei χ irred. Charakter einer endl. Gruppe G, $\chi = \mathrm{tr}(U)$.
Dann gilt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{falls } U \\ -1 & \end{cases} \begin{matrix} \text{reell} \\ \text{komplex} \\ \text{quatern.} \end{matrix}$$

Bew.: $\quad n := \dim(U)$.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_{ij}(g)\,U_{ji}(g) = \circledast$$

(i) U reell $\Rightarrow$ o.B.d.A.: $U = \overline{U}$

$$\Rightarrow \circledast = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{ji} = \underline{\underline{1}}$$ (Orthog. !)

(ii) U komplex $\Rightarrow U = \overline{W}$, $U \not\simeq W$

$\Rightarrow \circledast = \underline{\underline{0}}$ (wieder wegen Orthogonalität !)

(iii) U quaternionisch $\Rightarrow U = W\,\overline{U}\,W^{-1}$, W unitär.

$$\Rightarrow \circledast = \sum_{\substack{i,j=1\\k,l=1}}^{n} W_{jk}\overline{W_{il}}\underbrace{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}U_{ij}(g)\,\overline{U}_{kl}(g)}_{=\frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl}}$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{tr}(W\cdot\overline{W}) = \circledast$$

Man kann noch zeigen, dass man W reell äquivalent zu einer Matrix W' wählen kann, die schiefsymm. ist, also: $W = XW'X^{-1}$, $\overline{X} = X$,

$$\circledast = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(XW'X^{-1}\,\overline{XW'X^{-1}}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(XW'X^{-1}X\,\overline{W'}\,X^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(W'\,\overline{W'}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tr}\left(W'\cdot(-(W')^{+})\right)$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{tr}(-\mathbb{1}) = \underline{\underline{-1}}.$$

(Ergänzung: Simon, Thm. II.6.2) $\square$

Definition. If U is a self-conjugate irrep in which all $U(x)$ are simultaneously real in some basis, we call U a *real representation.* If U is self-conjugate but not real, we call it *quaternionic.*

While it is no coincidence that Example 1 has the groups of quaternionic units, the reason for the name is not merely the example but Theorem II.6.4 below.

Theorem II.6.2. *Let U be an irrep of G on X. Then U is self-conjugate if and only if there exists an anti-unitary map J on X so that*

$$U(x)J = JU(x) \tag{II.6.1}$$

for all $x \in G$. J is unique up to a phase factor, $J \mapsto e^{i\theta}J$. Moreover, $J^2 = \pm\mathbb{I}$ with $J^2 = \mathbb{I}$ if U is real and $J^2 = -\mathbb{I}$ if U is quaternionic.

Remark. One might think that J^2 was dependent on phase but since J is anti-linear,

$$(e^{i\theta}J)^2 = e^{i\theta}Je^{i\theta}J = e^{i\theta}e^{-i\theta}J^2 = J^2.$$

Proof. Let K be a complex conjugate. Then if (II.6.1) holds,

$$KU(x)K(KJ) = (KJ)U(x)$$

and $W = KJ$ is unitary, so

$$KU(x)K = WU(x)W^{-1}, \tag{II.6.2}$$

so U is self-conjugate. Conversely, let (II.6.2) hold for a complex conjugate K. Then

$$U(x)(KW) = (KW)U(x),$$

so $J = KW$ obeys (II.6.1) and is anti-unitary.

Thus, (II.6.1) holds for J anti-unitary if and only if U is self-conjugate. Suppose (II.6.1) holds and let $J^2 = L$. Then L is unitary and

$$LU(x) = J^2U(x) = JU(x)J = U(x)J^2 = U(x)L,$$

so by Schur's lemma, $L = c\mathbb{I}$. Since L is unitary, $c = e^{i\theta}$. But L commutes with J so $J(c\mathbb{I}) = c\mathbb{I}J$; that is, $\bar{c} = c$ so $c = \pm 1$. By Schur's lemma again, if J_1, J_2 obey (II.6.1), $J_1J_2 = c\mathbb{I}$ or $J_1 = \pm cJ_2$, so J is unique up to phase.

If $J^2 = +\mathbb{I}$, then by Lemma II.6.3 below, there is an orthonormal basis where $J\varphi_i = \varphi_i$ and so

$$\begin{aligned}\langle\varphi_i, U(x)\varphi_j\rangle &= \langle JU\varphi_j, J\varphi_i\rangle \\ &= \langle UJ\varphi_j, J\varphi_i\rangle = \langle U\varphi_j, \varphi_i\rangle = \overline{\langle\varphi_i, U(x)\varphi_j\rangle},\end{aligned}$$

so the matrix elements of U are real. Conversely, if the matrix elements of all $U(x)$ are real in a basis φ_i and $J(\sum b_i\varphi_i) = \sum \bar{b}_i\varphi_i$, then $JU(x) = U(x)J$, $J^2 = +\mathbb{I}$, and J is a suitable antilinear map. Thus, $J^2 = +\mathbb{I}$ if U is real and $J^2 = -\mathbb{I}$ if U is not real. $\square$

Was können wir an den Charakteren sehen?

Satz: U ist komplex $\Leftrightarrow$ $\chi \neq \bar{\chi}$ $\qquad (\chi = \mathrm{tr}(U))$

Bew.: $U \not\approx \bar{U}$ $\Leftrightarrow$ $\chi \neq \bar{\chi}$. $\square$

Also: Wenn χ reell, somit $\chi = \bar{\chi}$, dann kann U immer noch reell oder quaternionisch sein.
Das kann man dann nur mit Frobenius/Schur sehen!

Noch eine Anwendung:

Def.: $S(h) = |\{g \in G \mid g^2 = h\}|$

Sei nun $c^{(\alpha)} = 1, 0, -1$ gemäß $U^{(\alpha)}$ reell, kompl, quat.
Dann gilt:

$$S(h) = \sum_{\alpha \in \hat{G}} c^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)}(h)$$

und:

$$S(e) = \sum_{\substack{\alpha \\ \text{reell}}} d^{(\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha \\ \text{quat.}}} d^{(\alpha)}$$

Bew.: Übung

Satz: Sei $m = |\{\alpha \mid \chi^{(\alpha)} \text{ reell}\}|$. Dann gilt:

(1) $$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S(g)^2$$

(2) $m = \#(\text{ambivalente Klassen von } G)$.

(ohne Bew.)

<u>Satz:</u> $|G|$ sei <u>ungerade</u>.
Dann ist jede Darstellung außer der trivialen Darst. <u>komplex</u>!

<u>Bew.:</u> $n = |G| \Rightarrow x^n = e, \ \forall x \Rightarrow x^{n+1} = x.$

n ungerade $\Rightarrow k = \frac{1}{2}(n+1) \in \mathbb{N}, \quad x^{2k} = x$

$$\Rightarrow (x^k)^2 = x \Rightarrow S(x) \geq 1.$$

Andererseits ist: $\sum_{x \in G} S(x) = |G|,$

da genau $|G|$ Elemente $h \in G$ für <u>alle</u> Gleichungen vom Typ $h^2 = x$ zur Verfügung stehen.

$$\Rightarrow S(x) = 1, \quad \forall x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} S(x)^2 = 1 = m$$

$$= |\{\alpha \mid \chi^{(\alpha)} \text{ reell}\}|$$

$\Rightarrow$ <u>nur</u> die triv. Darstellung ist selbstkonjugiert!

Ex C_3

(Ex) $G = A_4 \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times_s \mathbb{Z}_3$, $|A_4| = 12$

(Symmetriegruppe$^{(+)}$ des Tetraeders)

$[G, G] = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow \quad A = G / [G, G] \simeq \mathbb{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad 3$ 1D irreps !

A_4 Klasse	$\{e\}$	$(123)_{(1)}$	$(132)_{(2)}$	$(12)(34)$
Ordn.	1	4	4	3
Winkel:	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$	π
$\chi^{(0)}$	1	1	1	1
$\chi^{(1)}$	1	ω	ω^2	1
$\chi^{(2)}$	1	ω^2	ω	1
$\chi^{(3)}$	3	0	0	-1

(mit $\omega = e^{2\pi i / 3}$)

Bem.:
- $1^2 + 1^2 + 1^2 + n^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad n = 3$
- Char. als 1D Darstellungen von A
- 3D Darst. durch Orthogonalität !