I Darstellungen

Ex
- $S_2 = \{ e, (12) \}$; • $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $S_n: \quad \pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$

Def.: Eine Darstellung ist ein Gruppenhomomorphismus in die Automorphismengruppe eines "Raumes": $\phi : G \to \mathrm{Aut}(V)$

$$g \mapsto \phi(g).$$

Also ist:

- $\phi(gh) = \phi(g)\,\phi(h)$
- $\phi(e) = \mathrm{Id}$
- $\phi(g^{-1}) = \big(\phi(g)\big)^{-1}$

Def.: Eine Darstellung heißt linear, wenn V ein Vektorraum und $\mathrm{Aut}(V) = GL(V)$ ist. Dann heißt $\dim(V)$ der Grad der Darstellung.

Vereinbarung: Ab jetzt steht Darst. für lineare Darstellung, und V für $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$.

Ziel: klassifiziere alle Darstellungen!

$\rightsquigarrow$ Geignete Einschränkung notwendig.

Ex Triviale Darstellung: $g \mapsto \mathrm{Id}$ (!)

Betr.: $\mathbb{C}^n$, mit $\langle . | . \rangle$:

(i) $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$

(ii) $\langle u | u \rangle \geq 0$, mit $\langle u | u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

(iii) $\langle u | \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \alpha \langle u | v_1 \rangle + \beta \langle u | v_2 \rangle$

"Sesquilinearform", Skalarprodukt

Ex. $u = \sum u_i e_i \quad \curvearrowright \quad \langle u | v \rangle := \sum \bar{u}_i v_i$

Satz: Sei G endl. Gruppe, $\mathcal{U}: G \to GL(n)$ eine Darstellung. Dann ex. ein Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ für das alle $\mathcal{U}(g)$ unitär sind, also

$$\langle \mathcal{U}(g) v | \mathcal{U}(g) w \rangle = \langle v | w \rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n, \forall g \in G.$$

Bew.: $(. | .)$ sei irgendein Skalarprodukt.

Setze:

$$\langle v | w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\mathcal{U}(g) v \,|\, \mathcal{U}(g) w)$$

Dies ist wieder ein Skalarprodukt (Übung!)

Betrachte:

$$\langle \mathcal{U}(g) v | \mathcal{U}(g) w \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_h (\mathcal{U}(h)\mathcal{U}(g) v \,|\, \mathcal{U}(h)\mathcal{U}(g) w)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_h (\mathcal{U}(hg) v \,|\, \mathcal{U}(hg) w)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h'} (\mathcal{U}(h') v \,|\, \mathcal{U}(h') w) = \langle v | w \rangle,$$

da $g \mapsto hg$, für festes h, eine Bijektion ist! $\square$

Def.: Zwei Darstellungen U, V heißen **äquivalent**, wenn ein $T \in GL(n)$ ex. mit

$$U(g) = T\, V(g)\, T^{-1}, \qquad \forall g \in G.$$

Satz: Jede Darstellung einer endl. Gruppe (Grad $< \infty$) ist einer **unitären** Darstellung äquivalent!

Bew.: Benutze vorigen Satz + geeignete Basis
Ausführung: Übung! (Trebin: S. 104) →

Bem.:

- Einschr. auf **unitäre** Darst. o.B.d.A.!
- auch für kompakte Gruppen wahr!
- **nicht** für unendl. Gruppen!
  Ex $G = \mathbb{Z}$, $\phi(n) = a^n$, $|a| \neq 1$
  ↝ Was geht schief? ($\langle .,. \rangle$ nicht def.)
- $U: G \to \mathcal{U}(n)$ heißt **unitäre** Darst.
- Alle E.W. von $U(g)$ sind in S^1, und sogar Einheitswurzeln (warum?)

Ex. $G = C_n = \langle g \rangle$.

$U: g \mapsto e^{2\pi i/n}$ ist unitäre Darst. von C_n.

Beweis (Skizze):

$(e_i | e_j) = \delta_{ij}$; $\quad \langle \eta_i | \eta_j \rangle = \delta_{ij}$;

$\eta_i = T(e_i) \quad \curvearrowright \quad T \in GL(n, \mathbb{C}) \quad \overset{\circledast}{\curvearrowright} \quad \langle Tv | Tw \rangle = (v|w)$

bzw. $\langle v|w \rangle = (T^{-1}v | T^{-1}w)$

$\langle Te_i | Te_j \rangle = (e_i | e_j)$

$$\boxed{U'(g) := T^{-1}\, U(g)\, T}$$

$$\Rightarrow \quad (U'(g)v \,|\, U'(g)w) = (T^{-1}U(g)Tv \,|\, T^{-1}U(g)Tw)$$

$$= \langle U(g)Tv \,|\, U(g)Tw \rangle = \langle Tv | Tw \rangle = (v|w)$$

$\Rightarrow \quad U'$ unitär für $(.|.)$ $\square$

$\circledast$ $v = \sum_i \alpha_i e_i$; $w = \sum_i \beta_i e_i$

$Tv = \sum_i \alpha_i \eta_i$; $Tw = \sum_i \beta_i \eta_i$

$$\langle Tv | Tw \rangle = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \beta_j \underbrace{\langle \eta_i | \eta_j \rangle}_{= (e_i | e_j) = \delta_{ij}} = \ldots = (v|w)$$

Def.: $U: G \to \mathcal{U}(X)$, $V: G \to \mathcal{U}(Y)$ heißen unitär äquivalent, falls ein $T: X \to Y$ ex., T unitär, mit:

$$V(g) = T\, U(g)\, T^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Satz: U, V seien unitäre Darstellungen in Hilberträumen X, Y. Falls eine Bijektion $T: X \to Y$ ex. mit $V(g) = T\, U(g)\, T^{-1}$ $(\forall g \in G)$, so ex. auch eine unitäre Abb. mit derselben Eigenschaft!

Bew.: $U(g) = T^{-1} V(g)\, T$; $\quad U(g)^+ = (U(g))^{-1} = U(g^{-1})$

$$\Rightarrow \quad U(g^{-1}) = T^+ V(g^{-1}) (T^+)^{-1}, \quad \forall g$$

$$\Rightarrow \quad U(g) = T^+ V(g) (T^+)^{-1} = T^+T\, U(g)\, (T^+T)^{-1}$$

$T^+T = SDS^{-1}$; $\sqrt{T^+T} = S\sqrt{D}\,S^{-1}$

$$\Rightarrow \quad T^+T\, U(G) = U(G)\, T^+T \quad \Rightarrow \quad \sqrt{T^+T}\, U(G) = U(G) \sqrt{T^+T}$$

T^+T ist pos. Operator, mit eindeutiger Wurzel $|T| > 0$. $(|T|^+ = |T|)$
Sei $T = W \cdot |T|$ die polare Zerlegung ("$z = r \cdot e^{i\varphi}$") von T; dann ist W unitär, $W: X \to Y$, und:

$$W^+W = \underbrace{(|T|^{-1})^+}_{= |T|^{-1}} \underbrace{T^+T}_{= |T|^2} |T|^{-1} = \mathbb{1}$$

$$W\, U(g)\, W^{-1} = T \cdot |T|^{-1} \cdot U(g) \cdot |T| \cdot T^{-1}$$

$$= T \cdot U(g) \cdot T^{-1} \qquad (!)$$

$$= V(g)$$

□

Bem.: Für polare Zerlegung s. Reed/Simon, S. 197 & S. 297 oder Rudin!

Zerlegung von Darstellungen

Vektorräume: X, Y;

$X \oplus Y$: (x, y) mit Addition: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Skalarprodukt:

$$\langle (x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1 \mid x_2 \rangle_X + \langle y_1 \mid y_2 \rangle_Y$$

$A \in GL(X)$, $B \in GL(Y)$:

$$(A \oplus B)(x, y) = (Ax, By)$$

$$\Rightarrow \quad (A \oplus B) \cdot (C \oplus D) = AC \oplus BD \qquad \text{(Bew. ?)}$$

Def.: Direkte Summe von Darstellungen:
$A \in \mathcal{U}(X)$, $B \in \mathcal{U}(Y)$ seien Darstellungen von G.

$$\Rightarrow \quad \boxed{(A \oplus B)(g) = A(g) \oplus B(g)}$$

Def.: U sei eine Darstellung von G auf X.
Ein Unterraum $Y \subseteq X$ heißt invariant, falls

$$U(g)\, Y \subseteq Y, \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Satz: U sei unitäre Darstellung, und $Y \subseteq X$ sei inv. Unterraum. Dann ist auch $Y^\perp$ invariant. $U|_Y$ und $U|_{Y^\perp}$ sind Darstellungen, und es gilt: $U = U|_Y \oplus U|_{Y^\perp}$.

Bew.: $Y^\perp = \{ x \mid \langle x | y \rangle = 0 \ , \ \forall y \in Y \}$

Sei $x \in Y^\perp$, $y \in Y$, $g \in G$. Dann:

$$\langle U(g) x \mid y \rangle = \langle x \mid U(g)^+ y \rangle = \langle x \mid U(g)^{-1} y \rangle$$

$$= \langle x \mid U(g^{-1}) y \rangle = 0, \quad \text{da } U(g^{-1}) y \in Y.$$

Also $U(g)x \in Y^\perp$, und $Y^\perp$ ist inv., da x, y, g bel.

Es ergibt sich für $Y \oplus Y^\perp$ eine Blockdarstellung:

$$U(g) = \left(\begin{array}{c|c} U_1(g) & 0 \\ \hline 0 & U_2(g) \end{array} \right), \quad \text{also} \quad U = U_1 \oplus U_2 \qquad \square$$

Bem.: • Resultat lebt von der Unitarität!

• Analogon für kompakte Gruppen möglich.

• Resultat i.a. nicht wahr für Darst. unendlicher Gruppen!

Ex $\quad G = \mathbb{R}, \quad U(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright$ Jordan-Form

Def.: Falls die unitäre Darst. U (auf X) nur die triv. Räume $\{0\}$ und X inv. läßt, heißt sie irreduzibel.

kurz: "irrep".

Bem.: U ist irrep $\Leftrightarrow$ U kann nicht als dir. Summe zweier Darst. vom Grad ≥ 1 geschrieben werden.

(Ex) Alle 1D Darstellungen sind irreps!
z.B.:

$$U : S_n \to \mathbb{C}$$
$$\pi \to U(\pi) \equiv 1 \qquad (\text{"triv. Darst."})$$
$$U(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi) \qquad (\text{"Signatur"})$$

Satz: Jede $\overbrace{\text{(unitäre)}}^{\text{endlich-dim.}}$ Darstellung einer endl. Gruppe kann als direkte Summe von irreps geschrieben werden.

Bew.: klar für $\deg(U) = 1$.
Ann., Satz sei wahr für $\deg(U) \leq n$.
Sei U geg. mit $\deg(U) = n+1$.
Dann:

(i) U ist irrep $\Rightarrow$ nichts zu zeigen.

(ii) $U = \tilde{U} \oplus \tilde{U}^{\perp}$, und $\deg(\tilde{U}) \leq n$, $\deg(\tilde{U}^{\perp}) \leq n$

↷ Induktion greift! □

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k}$$

Darum möchte man die U_k "bis auf Äquivalenz" genau und vollständig kennen!