Das Schur'sche Lemma

Lemma ("Schur I")
Sei U eine unitäre, irreduzible Darstellung der Gruppe G auf $V = \mathbb{C}^n$, und A eine Matrix mit

$$U(g)\, A = A\, U(g) \quad , \quad \forall\, g \in G.$$

Dann ist $A = c \cdot \mathbb{1}$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Ist umgekehrt $A = c \cdot \mathbb{1}$ die einzige Matrix, die mit allen $U(g)$ vertauscht, so ist U irreduzibel.

Bew.: Sei $Ax = \lambda x$, mit $x \neq 0$ (das ex. immer).
Setze:

$$W = \left\{ \sum_g a_g \cdot U(g)\, x \;\middle|\; a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

Dann ist W ein Unterraum von V, und:

$$U(h) \cdot \sum_g a_g\, U(g)\, x = \sum_g a_g\, U(hg)\, x$$

$$= \sum_{g'} a_{h^{-1}g'}\, U(g')\, x \quad \in \quad W,$$

also ist W invariant. Da U irrep, ist nur $W = \{0\}$ oder $W = V$ möglich, wegen $0 \neq x \in W$ somit $W = V$.
Da gilt:

$$A\, U(g)\, x = U(g)\, A x = U(g)\, \lambda x$$

$$= \lambda\, U(g)\, x$$

folgt:

$$A y = \lambda y, \quad \forall\ y \in W = V,$$

also $\quad A = \lambda \mathbb{1} \qquad (\text{bzw. } c = \lambda)$.

Falls U reduzibel, so ist $U \sim U_1 \oplus U_2$, und $U_1 \oplus U_2$ vertauscht mit $c_1 \cdot \mathbb{1}^{(1)} \oplus c_2 \cdot \mathbb{1}^{(2)}$.

$\square$

<u>Folgerung:</u> Irreps von abelschen Gruppen sind stets eindimensional!

<u>Bew.:</u> Sei U eine irred. Darstellung von G.
Dann ist:

$$\begin{aligned} U(g) \cdot U(h) &= U(gh) = U(hg) \\ &= U(h)\, U(g), \qquad \forall\ g, h \in G \end{aligned}$$

und Schur I gilt für jedes $U(h)$.
Also ist $U(h) = c_h \cdot \mathbb{1}$, und <u>jeder</u> Unterraum von V ist invariant!
Da U irreduzibel, muss $\dim(V) = 1$ gelten!

$\square$

<u>Bem.:</u>
- kennt man einen Satz von Generatoren, so kann man Schur I auch verwenden, um Irreduzibilität zu testen.
- Argumente gehen auch für kompakte Gruppen durch.

Lemma ("Schur II")

U_1, U_2 seien irreps von G, auf V_1, V_2.
Sei $A: V_1 \to V_2$ so daß

$$A\, U_1(g) = U_2(g)\, A, \quad \forall g \in G: \qquad \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "U_1"] \arrow[d, "A"'] & V_1 \arrow[d, "A"] \\ V_2 \arrow[r, "U_2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Dann ist entweder $A = 0$ oder U_1 und U_2 sind äquivalent, und A eindeutig bis auf eine Konstante (als Faktor).

Bew.: Sei $x \in \ker(A)$, und $y = U_1(g)\,x$.
Dann ist

$$A y = A\, U_1(g)\, x = U_2(g)\, A x = U_2(g)\, 0 = 0$$

und $y \in \ker(A)$, also $\ker(A)$ inv. Unterraum (unter U_1) von V_1. Da U_1 irreduzibel, haben wir:

(i) $\ker(A) = V_1 \;\Rightarrow\; A(V_1) = \{0\} \;\Rightarrow\; A \equiv 0.$

(ii) $\ker(A) = \{0\} \;\Rightarrow\; A$ injektiv

Andererseits ist $\mathrm{Im}(A)$ invariant unter U_2, denn $y \in \mathrm{Im}(A)$ impliziert $y = Ax$ für ein $x \in V_1$, also

$$U_2(g)\, y = U_2(g)\, A x = A\, U_1(g)\, x = A x' \in \mathrm{Im}(A).$$

Somit:

(i') $\mathrm{Im}(A) = \{0\} \;\Rightarrow\; \ker(A) = V_1 \;\Rightarrow\; A \equiv 0$ (s.o.)

(ii') $\mathrm{Im}(A) = V_2 \neq \{0\} \;\Rightarrow\; \ker(A) = \{0\}$ (wegen (ii))
$\Rightarrow A$ bijektiv
$\Rightarrow U_2(g) = A\, U_1(g)\, A^{-1}$

Falls $\quad U_2(g) = A\, U_1(g)\, A^{-1} = \mathcal{B}\, U_1(g)\, \mathcal{B}^{-1}$,

so ist:

$$\mathcal{B}^{-1} A\; U_1(g) = U_1(g)\, \mathcal{B}^{-1} A$$

und $\mathcal{B}^{-1} A = c \cdot \mathbb{1}$ nach Schur I, also $A = c \cdot \mathcal{B}$

$\square$

Alternativer Beweis: $\quad (A : V_1 \to V_2)$

$$A\, U_1(g) = U_2(g)\, A \qquad \text{(o. B. d. A.: } U_1, U_2 \text{ unitär)}$$

$$\Rightarrow \quad U_1(g^{-1})\, A^+ = A^+\, U_2(g^{-1}), \quad \forall g$$

$$\Rightarrow \quad U_1(g)\, A^+ = A^+\, U_2(g)$$

$$\Rightarrow \quad A^+ A\; U_1(g) = A^+\, U_2(g)\, A = U_1(g)\, A^+ A$$

und: $\quad AA^+\, U_2(g) = U_2(g)\, AA^+$

$\overset{\text{Schur I}}{\Rightarrow} \quad AA^+ = \underbrace{\tilde{c} \cdot \mathbb{1}_2}_{\text{in } V_2}, \quad A^+A = \underbrace{c \cdot \mathbb{1}_1}_{\text{in } V_1}$, und $c = \tilde{c}$ (!)

(denn: $\tilde{c}^2 \cdot \mathbb{1}_2 = A\underline{A^+A}A^+ = c\, AA^+ = \tilde{c} \cdot c \cdot \mathbb{1}_2$ und $c^2\, \mathbb{1}_1 = \ldots = c\tilde{c}\, \mathbb{1}_1$)

Sodann:

(i) $\quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (!)$

(ii) $\quad c \neq 0 \quad \overset{\circledast}{\Rightarrow} \quad c > 0 \quad (!)$, und $W = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot A$ ist unitär, also $U_1 \sim U_2$.

(beides mit Skalarprodukt zeigen!)

Rest (Eindeutigkeit bis auf konst. Faktor) wie oben!

$\square$

$\circledast$ $\ker(A) = \{0\}$ und $\ker(A^+) = \{0\}$, also $\dim(V_1) = \dim(V_2)$

2 Ergänzungen:

- $A^+A = 0$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \langle x | A^+A x\rangle = \underbrace{\langle Ax | Ax\rangle = 0}_{\Leftrightarrow\ Ax = 0} \end{array}\right\} \ \forall x \ \Rightarrow A = 0$$

- $0 \leq \langle Ax | Ax\rangle = \langle x | A^+A x\rangle$

$$\underset{A^+A = c\mathbb{1}}{=} c \cdot \langle x | x\rangle$$

$$\overset{x \neq 0}{\Rightarrow} \quad c = \frac{\langle Ax | Ax\rangle}{\langle x | x\rangle} \geqslant 0$$

2 Anwendungen

<u>Prop.:</u> Sei χ eine 1D Darstellung von G und $\mathcal{U}$ eine irrep. Dann ist $\chi \cdot \mathcal{U}$ eine irrep.

<u>Bew.:</u> $\chi \cdot \mathcal{U}$ ist sicher eine Darstellung. Außerdem sind die inv. Unterräume von $\mathcal{U}$ und $\chi \cdot \mathcal{U}$ identisch, also muss $\chi \cdot \mathcal{U}$ irrep sein $\square$

(Ex) Sei $\mathcal{U}$ eine Darstellung von S_n.
Dann ist durch:

$$\pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \mathcal{U}(\pi)$$

eine Darstellung von S_n definiert, die genau dann irreduzibel ist, wenn $\mathcal{U}$ es ist.

<u>Satz:</u> Sei $\hat{G}_1$ die Menge der 1D irreps. Dann ist $\hat{G}_1$ eine abelsche Gruppe, mit punktw. Multiplikation als Gruppenverknüpfung.

<u>Bew.:</u> Aus obiger Prop. folgt, dass $\chi_1 \cdot \chi_2$ wieder eine Darstellung ist. Einselement: $g \mapsto \chi_0(g) \equiv 1$.
Da $|\chi(g)| = 1$, ist $\bar{\chi}$ das Inverse zu χ. $\square$

<u>Bem.:</u> Ist G abelsch, so ist $\hat{G} = \hat{G}_1$ die sog. <u>duale Gruppe</u>.
<u>Ziel:</u> G endlich & abelsch $\Rightarrow |\hat{G}| = |G|$