Gruppen-Algebra und reguläre Darstellung

Sei G eine endl. Gruppe.
Sei δ_g ein formales Symbol (später: char. Fktn.)

Betr.: $\mathcal{A}(G) := \{ \sum_g a_g \delta_g \mid a_g \in \mathbb{C} \}$, $\boxed{a_g = a(g)}$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dim. $|G|$!

Nun wollen wir noch ein Produkt einführen.
Ansatz:

$$\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$$

Damit bekommen wir:

$$\overbrace{\Big(\sum_g a(g)\delta_g\Big)}^{a}\overbrace{\Big(\sum_h b(h)\delta_h\Big)}^{b} = \sum_{g,h} a(g)b(h)\delta_{gh}$$

$$= \sum_{g'} \underbrace{\sum_{\substack{g,h \\ g\cdot h = g'}} a(g)\, b(h)}\ \delta_{g'}$$

$$= \sum_h a(g'h^{-1})\, b(h) \qquad (\text{"Faltung"})$$

Def.: $\mathcal{A}(G)$ wird zur sog. Gruppenalgebra mit dem Faltungsprodukt:

$$(a * b)(g) = \sum_h a(gh^{-1})\, b(h)$$

und der Konjugation:

$$a^*(g) = \overline{a(g^{-1})}.$$

Man beachte: $(a*b)^* = b^* * a^*$ (nachrechnen!)

Nun können wir auch δ_g gefahrlos festlegen:

$$\delta_g = \begin{cases} 1 & \text{bei } g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \delta_g :\ & G \to \mathbb{C} \\ & h \mapsto \delta_g(h) = \begin{cases} 1, & h = g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und damit: $\boxed{a = \sum a(g)\,\delta_g}$

Warum dies alles?

<u>Satz:</u> Sei G endl. Gruppe, und $\mathcal{U}$ (unitäre) Darstellung auf dem Hilbertraum X. Für $a \in \mathcal{A}(G)$ setzen wir:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a) := \sum_g a(g)\,\mathcal{U}(g). \qquad \circledast$$

Dann gilt:

(i) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a+b) = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a) + \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(b)$

(ii) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a * b) = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a) \cdot \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(b)$

(iii) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a^*) = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(a)^*$ $\qquad (* = \dagger)$

(iv) $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\delta_e) = \mathrm{Id}.$

Falls umgekehrt $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ die Eigenschaften (i) - (iv) erfüllt, dann ex. eine unitäre Darst. $\mathcal{U}$ sodaß $\circledast$ gilt.

<u>Bew.:</u> Übung.
Hinrichtung klar.
Rückrichtung: Setze $\mathcal{U}(g) = \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(\delta_g)$

□

Dies def. eine <u>$*$-Darstellung</u> von $\mathcal{A}(G)$.

<u>Folgerung:</u> Es gibt eine 1-1 Korrespondenz (Bijektion) zwischen u. Darstellungen von G und $*$-Darstellungen von $\mathcal{A}(G)$. (Bew.: Übung)

Können wir hiervon profitieren? Ja!

Setze:

$$L_{\mathcal{A}}(a)\, b = a * b$$

und:

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)}\, g(x).$$

Dann ist $\langle . | . \rangle$ ein $\underbrace{\text{Skalarprodukt}}_{}$ (auf $\mathcal{A}(G)$) und $L_{\mathcal{A}}$ wird eine $*$-Darstellung! Setze:

$$\boxed{(L(x) f)(y) := f(x^{-1} y)}$$

Dann ist:

$$(\delta_x * f)(y) = \sum_z \delta_x(y z^{-1}) \cdot f(z)$$

$$= f(x^{-1} y) \qquad (\text{denn } x = y z^{-1} \Rightarrow z = x^{-1} y)$$

und dies <u>induziert</u> $L_{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}(G)$, da $a = \sum_{x \in G} a(x) \cdot \delta_x$ und $\{\delta_x \mid x \in G\}$ eine Basis ist.

Nun ist $L_{\mathcal{A}}(\delta_x)\, \delta_y = \delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ (!) →
und $L_{\mathcal{A}}$ ist daher sogar unitär! (nachrechnen!)

<u>Bem.:</u> Man kann auch prüfen:

$$\langle h | f * g \rangle = \langle f^* * h | g \rangle, \quad \forall\, f, g, h \in \mathcal{A}(G);$$

mit $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$ also: $\langle \delta_g * f | \delta_g * h \rangle = \langle \underbrace{\delta_e * f}_{= f} | h \rangle$

$$\delta_x * \delta_y \;(g) = \sum_z \delta_x (g z^{-1}) \, \delta_y (z)$$

einziger Beitrag von $z = y = x^{-1} g$,
also $g = xy$

$$= \delta_{xy} \; (g)$$

<u>Prop.:</u> Die Funktionen $D_{ij}^{(\alpha)}(x)$ trennen Punkte:
Für $x \neq y$ gibt es ein f :

$$f = \sum_k c_k \cdot D_{i_k j_k}^{(\alpha_k)}$$

mit $f(x) = 1, \quad f(y) = 0.$

<u>Bew.:</u> Setze $f(z) = |G| \cdot \langle \delta_x \mid \underbrace{L(z)\,\delta_e}_{=\delta_z} \rangle$
Dann ist →

$$f(x) = |G| \cdot \langle \delta_x \mid \delta_x \rangle = 1$$
$$f(y) = |G| \cdot \langle \delta_x \mid \delta_y \rangle = 0 \qquad (y \neq x)$$

Rest folgt aus Anwendung der vorigen Prop. !

□

Unser nächstes Ziel :

(a) $|\hat{G}| < \infty$

(b) $\sum_\alpha \left(d^{(\alpha)}\right)^2 = |G| \qquad (\overset{\nabla}{\circ})$

(c) $d^{(\alpha)} \mid |G|$

(d) $k = |\hat{G}| =$ Zahl der Konjugationsklassen

Damit kommen wir der Klassifikation ein gutes Stück näher !

$$\left(L(z)\,\delta_e \right)(u) = \delta_e(z^{-1}u) = \begin{cases} 1, & z^{-1}u = e \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \delta_z(u)$$

$$\Rightarrow \quad L(z)\,\delta_e = \delta_z$$

<u>Notation:</u> Darst. $U^{(\alpha)}$, Raum: $\mathbb{C}^{d^{(\alpha)}}$

Matrix $D^{(\alpha)}_{ij}$

<u>Satz:</u> Orthogonalitätsrelationen für Matrix-Elemente

Es gilt:

$$\boxed{\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{D^{(\alpha)}_{ij}(x)} \; D^{(\beta)}_{k\ell}(x) = \frac{1}{d^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta} \, \delta_{ik} \, \delta_{j\ell}}$$

<u>Bew.:</u> Sei $B: \mathbb{C}^{d^{(\alpha)}} \to \mathbb{C}^{d^{(\beta)}}$ eine lin. Abb.

Setze:

$$\tilde{B} := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} U^{(\beta)}(x) \; B \left(U^{(\alpha)}(x) \right)^{-1}$$

Dann ist:

$$U^{(\beta)}(y) \, \tilde{B} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} U^{(\beta)}(yx) \; B \left(U^{(\alpha)}(x) \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} U^{(\beta)}(z) \; B \left(U^{(\alpha)}(y^{-1} z) \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} U^{(\beta)}(z) \; B \left(U^{(\alpha)}(z) \right)^{-1} \cdot U^{(\alpha)}(y)$$

$$= \tilde{B} \cdot U^{(\alpha)}(y)$$

Falls $\alpha \neq \beta$, impliziert Schur II nun $\tilde{B} = 0$.

Falls $\alpha = \beta$, so ist $\tilde{B} = c \cdot \mathbb{1}$ mit:

$$c = \frac{1}{d^{(\alpha)}} \cdot \mathrm{tr}(\tilde{B}) = \frac{1}{d^{(\alpha)}} \cdot \mathrm{tr}(B) \qquad (!)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{B} = \underbrace{\frac{1}{d^{(\alpha)}} \cdot \mathrm{tr}(B) \cdot \delta_{\alpha\beta}}_{\text{Skalar!}} \cdot \mathbb{1}.$$

Wähle nun: $B = (B_{pq})$ mit $B_{pq} = \delta_{p\ell}\,\delta_{qj}$.
Dann ist $\alpha = \beta$ (da $B \neq 0$),
und: $\operatorname{tr}(B) = \delta_{\ell j}$, also:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{D^{(\alpha)}_{ij}(x)}\cdot D^{(\beta)}_{k\ell}(x) =$$

$$\sum_{r,m}\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} D^{(\beta)}_{kr}(x)\cdot \underset{\left(\delta_{r\ell}\,\delta_{mj}\right)}{\underset{\shortparallel}{B_{rm}}}\cdot \underbrace{\overline{D^{(\alpha)}_{im}(x)}}_{=\left(U^{(\alpha)}(x^{-1})\right)_{mi}}$$

$$= \tilde{B}_{ki} = \frac{1}{d^{(\alpha)}}\underbrace{\operatorname{tr}(B)}_{=\delta_{\ell j}}\cdot\delta_{\alpha\beta}\cdot\underbrace{(\mathbb{1})_{ki}}_{=\delta_{ki}}$$

$$= \frac{1}{d^{(\alpha)}}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{j\ell}$$

□

Beachte nun, dass $\{D^{(\alpha)}_{ij}(x)\}^{i,j=1,\dots,d^{(\alpha)}}_{\alpha\in\hat{G}}$ Funktionen in $\mathcal{A}(G)$ sind!
Da sie orthogonal sind, ist offenbar:

$$\sum_{\alpha\in\hat{G}}\left(d^{(\alpha)}\right)^2 \leq \dim(\mathcal{A}(G)) = |G|$$

(als Vektorraum!)

und insbesondere ist also:

$$\boxed{|\hat{G}| < \infty}$$

Satz: (Burnside)

$$\boxed{\sum_{\alpha \in \hat{G}} \left(d^{(\alpha)}\right)^2 = |G|} \qquad \circledast$$

Bew.: Nehmen wir für einen Moment an, dass die $\{D^{(\alpha)}_{ij}(x)\}$ vollständig sind. Dann folgt der Satz unmittelbar, weil die $D^{(\alpha)}_{ij}(x)$ den Raum aufspannen und $\circledast$ nur eine einfache Dimensionsformel ist!

□

Hilfssatz: (Stone-Weierstraß für endlich-dim. Räume)
Sei A der komplexe VR der Funktionen auf einer endl. Menge Y, so daß:

(i) $f, g \in A \quad \Rightarrow \quad f \cdot g \in A$ (punktw. Produkt)

(ii) für $x, y \in Y$, $x \neq y$, ex. ein $f \in A$ mit $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$.

Dann ist A die Menge aller Funktionen auf Y.

Bew.: Sei $\delta_x(y) := \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Sei f_{xy} die (ex.!) Funktion, die x und y trennt.

Dann ist:

$$\boxed{\delta_x = \prod_{y \neq x} f_{xy}},$$

und somit $\delta_x \in A$ (mittels (i)).
Aber $\{\delta_x\}_{x \in Y}$ ist sicher eine Basis für alle Funktionen auf Y, also ist A vollständig!

□

Stone-Weierstraß, allgemein:

Sei X kompakt; betrachte $C(X,\mathbb{C})$.

Sei $\mathcal{B} \subseteq C(X,\mathbb{C})$ mit:

(1) $f,g \in \mathcal{B} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{B},\ \alpha f + \beta g \in \mathcal{B},\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$

(2) $f \equiv 1 \in \mathcal{B}$

(3) $f_n \overset{\text{glm.}}{\Rightarrow} f \Rightarrow f \in \mathcal{B}$ $\quad (f_n \in \mathcal{B},\ \forall n)$

(4) $\mathcal{B}$ trennt Punkte von X

(5) $f \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = C(X,\mathbb{C})$.

Lit.: Reed / Simon
Yoshida

Bem.: ohne (3) folgt $\overline{\mathcal{B}} = C(X,\mathbb{C})$.

Nun kommt:

<u>Satz:</u> <u>"Peter-Weyl"</u> für endliche Gruppen:

$$\boxed{\left\{ \sqrt{d^{(\alpha)}} \cdot D^{(\alpha)}_{ij}(x) \right\}^{i,j=1,\dots,d^{(\alpha)}}_{\alpha \in \hat{G}}}$$ ist ein VONS von $\mathcal{A}(G)$

bzgl. des Skalarprodukts $\langle f | g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} \cdot g(x)$.

Es gilt: $$\boxed{\sum_{\alpha \in \hat{G}} \left(d^{(\alpha)}\right)^2 = |G|}$$

<u>Bew.:</u> Betrachte $A = \{ \sum c^{(\alpha)}_{ij} D^{(\alpha)}_{ij}(x) \mid c^{(\alpha)}_{ij} \in \mathbb{C} \}$.

Natürlich ist:

$$A \subseteq \mathcal{A}(G).$$

A ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Zu zeigen: A ist <u>vollständig</u>, also $A = \mathcal{A}(G)$.

Die Trennungseigenschaft hatten wir bereits gezeigt.

Bleibt zu zeigen:

$$D^{(\alpha)}_{ij}(x) \cdot D^{(\beta)}_{kl}(x) = \sum_{\substack{m \\ p,q}} c^{\alpha,\beta,m}_{ij;kl;pq} \; D^{(\gamma_m)}_{pq}(x)$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass auch ein Tensorprodukt (linke Seite)* von Darstellungen wieder eine Darstellung ist, und somit "geeignet" in irreps zerfällt (rechte Seite).

$$\overset{\text{Stone-W.}}{\Longrightarrow} \quad A = \mathcal{A}(G)$$

$\square$

Also kann man <u>bel.</u> Funktionen auf der Gruppe in wohldefinierter Weise "entwickeln"!

$\circledast$ $D^{(\alpha)}_{ij}(x) \cdot D^{(\beta)}_{kl}(x) = \left(U^{(\alpha)}(x) \otimes U^{(\beta)}(x) \right)_{ik,jl}$

Kleine Erinnerung:

Tensor - Produkte

X, Y : endl.-dim. Hilbert-Räume

X: Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$

Y: Basis $\{f_1, \dots, f_m\}$

Neue Basis von $X \otimes Y$: $\left\{ g_{ij} = e_i \otimes f_j \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{matrix} \right\}$

Sei $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_j f_j$.

Dann ist

$$x \otimes y = \sum_{i,j} x_i y_j \; e_i \otimes f_j$$

$\rightsquigarrow$ Also ist $X \otimes Y$ ein VR der Dim. $n \cdot m$!

Wie "liftet" man lineare Abb. ?

Sei $A : X \to X$

$B : Y \to Y$

Setze: $A \otimes B$: $X \otimes Y \to X \otimes Y$

$$x \otimes y \mapsto (A \otimes B)(x \otimes y) := (Ax) \otimes (By)$$

$A \otimes B$ heißt <u>Tensor-</u> oder Kroneckerprodukt von A und B.

Es gilt:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$
$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (A \cdot A') \otimes (B \cdot B')$$
$$tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$$

Man kann alles in einer (einmal festgelegten) Version der Basis schreiben!

Bew.: Es gibt eine universelle Definition (basisfrei), die gewisse Vorteile hat. kommt evtl. später, bzw. kennen wir aus LAP II.

Satz: Seien U, V Darstellungen von G auf X, Y. Dann ist

$$U \otimes V(x) := U(x) \otimes V(x)$$

Darstellung von G auf $X \otimes V$.

Bew.: $(U \otimes V(x)) \cdot (U \otimes V(y))$

$$= (U(x) \otimes V(x)) \cdot (U(y) \otimes V(y))$$

$$= (U(x)\, U(y)) \otimes (V(x)\, V(y)) = U(xy) \otimes V(xy)$$

$$= (U \otimes V)\ (xy). \qquad \square$$

Satz: $U^{(\alpha)}, U^{(\beta)}$ seien irreps. Dann ist $U^{(\alpha)} \otimes U^{(\beta)}$ eine i.a. reduzible Darstellung, und es gilt:

$$\boxed{U^{(\alpha)} \otimes U^{(\beta)} \simeq \bigoplus_{\gamma \in \hat{G}} n^{\gamma}_{\alpha\beta}\ U^{(\gamma)}} \qquad (*)$$

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Bew.: klar! Jede unitäre Darst. zerfällt! $\square$

Folgerung: $$D^{(\alpha)}_{ij}(x)\ D^{(\beta)}_{kl}(x) = \sum_{\substack{m \\ p, q}} c^{\alpha, \beta, m}_{ij; kl; pq}\ D^{(\gamma_m)}_{pq}(x).$$

Bew.: Folgt aus $(*)$ durch expl. Basiswahl! $\square$