Beispiele

(1) $C_n = \langle r^n = e \rangle$, $|C_n| = n$

abelsch $\Rightarrow$ alle Darst. 1D

$x = e^{2\pi i/n}$

$\chi_m(r^k) = x^{m\cdot k}$, $0 \le m \le n-1$, $0 \le k \le n-1$

Ex $n=3$: $C_3 = \{e, r, r^2\}$, $x = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$

Tafel:

	$\{e\}$	$\{r\}$	$\{r^2\}$	
χ_0	1	1	1	
χ_1	1	x	x^2	treu
χ_2	1	x^2	x	treu

$\ulcorner$ $C_\infty \simeq \mathbb{Z}$: $\chi_\alpha(k) = e^{2\pi i\alpha k}$, $\alpha \in \hat{\mathbb{Z}} = T$, $k \in \mathbb{Z}$

$f(x+1) = f(x) \curvearrowright f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \cdot e^{2\pi i m x}$ $\lrcorner$

(2) $D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = e \rangle$, $|D_n| = 2n$

$srs = srsrr^{n-1} = r^{n-1} = r^{-1}$.

$\curvearrowright$ $D_n = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}, e, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}, s\}$

Ex D_4: 5 Klassen (s.u.), $n_1^2 + \dots + n_5^2 = 8$ (Vorgriff)

$\Rightarrow n_1 = \dots = n_4 = 1,\ n_5 = 2$

Tafel:

e	r^2	$\{r, r^3\}$	$\{s, sr^2\}$	$\{sr, sr^3\}$
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1
2	-2	0	0	0

$r = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_z$

$s = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$

<u>reell :</u> $r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$

Übung: Bestimme Basiswechsel!

<u>D_n allgemein :</u>

(a) n <u>gerade</u>

4 Darstellungen der Dim. 1 :

r^k	sr^k
1	1
1	-1
$(-1)^k$	$(-1)^k$
$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

$w = e^{2\pi i/n}$

$$D^m(r^k) = \begin{pmatrix} w^{mk} & 0 \\ 0 & w^{-mk} \end{pmatrix} \quad , \quad D^m(s \cdot r^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-mk} \\ w^{mk} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^m \simeq D^{n-m} \quad \curvearrowright \quad 0 \leq m \leq n/2$$

$m = 0$ und $m = n/2$: reduzibel!

Rest : irreduzibel! (Übung)

$$\Rightarrow \quad \chi_m(r^k) = 2\cos\frac{2\pi mk}{n} \qquad 0 < m < \frac{n}{2}$$

$$\chi_m(sr^k) = 0 .$$

<u>Kontrolle:</u>

$4 \cdot 1 + (\frac{n}{2} - 1) \cdot 4 = 4 + 2n - 4 = 2n$ ✓

(b) n ungerade

2 Darstellungen der Dim. 1:

r^k	$s \cdot r^k$
1	1
1	-1

Rest wie oben, irreduzibel für $0 < m \leq \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$

Kontrolle:

$$2 \cdot 1 + \tfrac{1}{2}(n-1) \cdot 4 = 2 + 2n - 2 = 2n. \checkmark$$

Zahl der Konjugationsklassen:

$n = 2\ell$: $\quad 4 + \ell - 1 = \ell + 3$,

und zwar:

$\{s, sr^2, \dots\}$, $\{sr, sr^3, \dots\}$, $(\ell+1)$ Klassen aus C_n

$\{e\}, \{r^\ell\}, \&\ (\ell-1)$ Paare

$n = 2\ell+1$: $\quad \ell + 2$,

und zwar:

$\{sr^k\}$, $(\ell+1)$ Klassen aus C_n

$\{e\}, \&\ \ell$ Paare

D_∞: $\quad s^2 = 1, \quad srs = r^{-1}$

(Rest analog zu oben, vgl. Serre, S. 40).

kleiner Rückblick

- Gruppe: $(G, \circ)$ mit:

  - $g \circ h$ bleibt in G
  - $\circ$ ist assoziativ
  - $\exists\, e: \quad e \circ a = a \circ e = a$ (neutrales E.)
  - zu x ex. x^{-1} (inverses E.)

Bem.: Ohne inverse Elemente bleibt eine Halbgruppe (mit oder ohne e). Eine Halbgruppe mit e heißt auch Monoid.

Ex. $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
Betr. die Menge der lin. Abb. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $\mathbb{Z}$ in sich abbilden, also $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, mit $f \neq 0$.
Diese Menge ist ein Monoid! (Warum?)

$\{\pm \mathrm{Id}\}$ ist die maximale Untergruppe, die Gruppe der Symmetrien von $\mathbb{Z}$ als Gitter.

Also: $\boxed{(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot) \simeq C_2 \times (\mathbb{N}, \cdot)}$

Übung: Ausdehnen auf affine Abbildungen!

- (lineare) <u>Darstellungen:</u>

$$D: \quad G \longrightarrow GL(\mathbb{C}, n) \qquad \text{(nicht singulär)}$$
$$\quad g \longmapsto D(g)$$

mit: $$D(g \cdot h) = D(g) \cdot D(h)$$

$$\curvearrowright \quad D(e) = \mathbb{1}$$
$$D(g^{-1}) = \left(D(g)\right)^{-1}$$

<u>Spannweite:</u>

(i) $D(g) \equiv \mathbb{1}$: triviale Darstellung

(ii) $g \neq h \Rightarrow D(g) \neq D(h)$:

D injektiv, Darstellung <u>treu</u>.
$\ker(D) = \{e\}$

<u>Satz:</u> Falls G endlich oder kompakt, so ist jede (endlich-dim.) Darstellung zu einer <u>unitären</u> Darstellung äquivalent!

<u>Satz:</u> Falls G endlich, gibt es - bis auf Äquivalenz - genausoviele irreps wie konj.-klassen!

<u>Bew.:</u> kommt in kürze!

Ex. S_n : $\pi \sim \sigma$, falls gleiche Zyklenstruktur.

$\Rightarrow$ $p(n)$ verschiedene irreps !

Ist das viel ? Ziemlich:

Satz: $$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\, n} \cdot \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \qquad (n \to \infty)$$

B G. E. Andrews,
The Theory of Partitions,
CUP (1998), reprint.

Fazit: Wir müssen noch einige Methoden lernen, bevor wir die Darstellungen im Griff haben.

Beobachtung:

- Wenn G abelsch, so ist $|\hat{G}| = |G|$, weil alle irreps vom Grad 1 sind.
- Irreps abelscher Gruppen sind Klassenfunktionen (trivialerweise !)
- Darstellungen abelscher Gruppen kann man einfach multiplizieren, und $\hat{G} \simeq G$.

$\longrightarrow$ Wie "retten" wir einen Teil hiervon für bel. G ?