

III: Charaktere

Def.: Sei D eine Darstellung von G .
Dann heißt

$$\begin{aligned} \chi: G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \chi(g) = \text{tr}(D(g)) \end{aligned}$$

ein Charakter, und zwar der Ch. von D .

Falls D irrep, heißt χ irreduzibel.

Satz: Äquivalente Darstellungen besitzen denselben Charakter!

Bew.: klar, da "tr" sich bei Ähnlichkeitstransformationen nicht ändert:

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (\text{auch wenn } AB \neq BA),$$

also:

$$\text{tr}(U A U^{-1}) = \text{tr}(U^{-1} U A) = \text{tr}(A).$$

□

Satz: $g \sim h \Rightarrow \chi(g) = \chi(h)$

Bew.: $g \sim h \Rightarrow h = \tau g \tau^{-1}$

$$\Rightarrow D(h) = D(\tau) D(g) (D(\tau))^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi(g) = \chi(h)$$

□

Damit ist jeder Charakter eine Klassenfunktion, also ein $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

$$f(xy x^{-1}) = f(y), \quad \forall x, y \in G.$$

Def.: $\tilde{Z}(G)$ bezeichne die Menge aller Klassenfunktionen auf G .

Prop.: $\tilde{Z}(G)$ ist eine Unter algebra von $\mathcal{A}(G)$, der Gruppenalgebra (G sei endlich), und es gilt:

$$\dim \tilde{Z}(G) = \#(\text{Konj.-Klassen von } G)$$

Bew.: Übung!

Satz: $\tilde{Z}(G)$ ist das Zentrum von $\mathcal{A}(G)$, d.h.
 $f \in \tilde{Z}(G) \Leftrightarrow f * g = g * f$ für alle $g \in \mathcal{A}(G)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{zur Erinnerung: } f = \sum_x f(x) \delta_x, \quad g = \sum_x g(x) \delta_x \\ \Rightarrow f * g(x) = \sum_y f(xy^{-1}) g(y) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } f \text{ Klassenfkt.} &\Leftrightarrow f(xz) = f(zx), \quad \forall x, z \in G \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\delta_{z^{-1}} * f)(x)}_{=f(zx)} = \underbrace{(f * \delta_{z^{-1}})(x)}_{=f(xz)}, \quad \forall x, z \in G \end{aligned}$$

Nun ist aber auch:

$$g = \sum_z g(z^{-1}) \delta_{z^{-1}}$$

und voriger Ausdruck ist dann äquivalent zu:

$$f * g = g * f, \quad \forall g \in \mathcal{A}(G)$$

□

Satz: Sei $\chi^{(\alpha)} = \text{tr}(D^{(\alpha)})$, $\alpha \in \hat{G}$.

Dann gilt:

$\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \hat{G}}$ ist eine ON-Basis von $\tilde{\mathcal{Z}}(G)$.

Insbesondere gilt: $\dim \tilde{\mathcal{Z}}(G) = |\hat{G}|$,
und wir bekommen:

$$|\hat{G}| = \#(\text{konj.-klassen von } G)$$

Bew.: Die 2. Hälfte folgt klar aus der ersten unter Verwendung obiger Proposition.

Setze: $\langle f | g \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} g(x)$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} \langle \chi^{(\alpha)} | \chi^{(\beta)} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\text{tr}(D^{(\alpha)}(x))} \text{tr}(D^{(\beta)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{d^{(\alpha)}} \sum_{j=1}^{d^{(\beta)}} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{D_{ii}^{(\alpha)}(x)} D_{jj}^{(\beta)}(x) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{d^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta} (\delta_{ij})^2 = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Hieraus folgt Orthonormalität, wir müssen also nur noch Vollständigkeit zeigen!

$$\begin{aligned} \text{Betr.: } & \frac{1}{|G|} \sum_y D_{ij}^{(\alpha)}(y \times y^{-1}) \\ &= \sum_{k,l=1}^{d^{(\alpha)}} D_{kl}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{|G|} \sum_y D_{ik}^{(\alpha)}(y) \overline{D_{jl}^{(\alpha)}(y)} \quad (\text{unitär!}) \\ &= \sum_{k,l=1}^{d^{(\alpha)}} D_{kl}^{(\alpha)}(x) \cdot \frac{1}{d^{(\alpha)}} \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} = \frac{1}{d^{(\alpha)}} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{d^{(\alpha)}} D_{kk}^{(\alpha)}(x) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Sei nun $f \in \mathcal{Z}(G)$. Dann ist (Peter-Weyl!):

$$f(x) = \sum_{\alpha} \sum_{i,j} c_{ij}^{(\alpha)} D_{ij}^{(\alpha)}(x) \quad \text{für geeignete } c_{ij}^{(\alpha)}.$$

Da f Klassenfunktion ist, haben wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_y f(y \times y^{-1}) \\ &= \sum_{\alpha, i, j} c_{ij}^{(\alpha)} \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_y D_{ij}^{(\alpha)}(y \times y^{-1})}_{= \frac{\delta_{ij}}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\hat{G}} \sum_{i=1}^d c_{ii}^{(\alpha)} \frac{1}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

und f ist eine Linearkombination der $\chi^{(\alpha)}$. $\square$

Bem.: • Es gibt andere Beweise, ohne Rückgriff

• Wir haben 2x Peter-Weyl:

(i) für $f \in \mathcal{A}(G)$ mittels $\{D_{ij}^{(\alpha)}\}_{\alpha, i, j}$

(ii) für $f \in \mathcal{Z}(G)$ mittels $\{\chi^{(\alpha)}\}_{\alpha}$

$\Rightarrow$ Basis für symmetrieangepasste Entwicklung in die "richtigen" Funktionen!

(Ex) Translationen $\leadsto e^{ikx} \leadsto FT \nabla$

Folgerung: Jeder Charakter ist von der Form:

$$\chi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} m_{\alpha} \cdot \chi^{(\alpha)}, \quad \text{mit } m_{\alpha} \in \mathbb{N}_0.$$

Bew.: χ ist Klassenfunktion, also $m_{\alpha} \in \mathbb{C}$ klar.
Nun ist $\chi = \text{tr}(\mathbb{D})$, und:

$$\mathbb{D} \cong \bigoplus_{\alpha} m_{\alpha} \cdot \mathbb{D}^{(\alpha)} \quad (\text{Zerlegungssatz})$$

$$\Rightarrow \chi = \sum m_{\alpha} \cdot \chi^{(\alpha)}, \quad \text{und } m_{\alpha} \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

Folgerung: Die m_{α} liegen fest, und sind durch χ eindeutig bestimmt. (klar!) $\square$

Folgerung: $\mathbb{D} \cong \mathbb{D}' \Leftrightarrow \chi = \chi'$

Bew.: " $\Rightarrow$ ": klar!

" $\Leftarrow$ ": χ legt Zerlegung fest, ergo bleibt keine Freiheit! $\square$

Damit ist klar:

Wenn wir Darstellungen bis auf Äquivalenz klassifizieren wollen, dann müssen wir zunächst nur die Charaktere bestimmen!

$\leadsto$ Einfachere Aufgabe!

Beachte: $\langle \chi^{(\alpha)} | \chi^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{s.o.})$

$$\text{mit } \sum_{\alpha} |\chi^{(\alpha)}\rangle \langle \chi^{(\alpha)}| = \mathbb{1} \quad (\text{Peter-Weyl!})$$

Damit bekommen wir: (in QM-Schreibweise)

$$|\chi\rangle = \sum_{\alpha} |\chi^{(\alpha)}\rangle \underbrace{\langle \chi^{(\alpha)} | \chi \rangle}_{m_{\alpha}}$$

Wir wollen einen guten Kalkül entwickeln.

Satz: $\chi^{(\alpha)} * \chi^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}$

und:

$$\sum_{y \in G} \chi^{(\alpha)}(xy^{-1}) \chi^{(\alpha)}(y) = \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x)$$

Bew.: - as usual -

$$\begin{aligned} \sum_{y \in G} \chi^{(\alpha)}(xy^{-1}) \chi^{(\beta)}(y) &= \sum_{i,j,k} \sum_y D_{ij}^{(\alpha)}(x) \overline{D_{ij}^{(\alpha)}(y)} D_{kk}^{(\beta)}(y) \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} D_{ij}^{(\alpha)}(x) \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} \delta_{jk} \\ &= \sum_k \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta} D_{kk}^{(\alpha)}(x) = \delta_{\alpha\beta} \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

□

Nun können wir die Charaktertafel definieren:

classes	C_1	C_2	...	C_k
irr. char.				
$\chi^{(\alpha_1)}$	*	*	...	*
$\chi^{(\alpha_2)}$	*	*	...	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\chi^{(\alpha_k)}$	*	*	...	*

(Ex) $G = C_3 = \{e, g, g^2\}, \quad g^3 = e$

cl. \ ch.	$\{e\}$ 1	$\{g\}$ 1	$\{g^2\}$ 1	(Ordnung)
$\chi^{(0)}$	1	1	1	
$\chi^{(1)}$	1	α	α^2	$2\pi i/3$
$\chi^{(2)}$	1	α^2	α	$\alpha = e$

Es ist noch sinnvoll, die Orthogonalitätsrelationen aufzuschreiben. Sei

$$\chi(C_i) = \chi(x) \quad \text{für ein } x \in C_i$$

Satz:

$$\sum_{i=1}^k \frac{|C_i|}{|G|} \overline{\chi^{(\alpha)}(C_i)} \chi^{(\beta)}(C_i) = \delta_{\alpha\beta} \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\frac{|C_i|}{|G|} \sum_{\alpha \in \hat{G}} \overline{\chi^{(\alpha)}(C_i)} \chi^{(\alpha)}(C_j) = \delta_{ij} \quad \textcircled{\text{II}}$$

Bew.: $\textcircled{\text{I}}$ kennen wir schon - es ist nur umgeschrieben!

Bedeutung:

$$(U_{i\alpha}) = \left\{ \frac{|C_i|}{|G|} \right\}^{1/2} \cdot \chi^{(\alpha)}(C_i)$$

ist unitäre Matrix, mit $U^+ U = \mathbb{1}$

Dann aber auch $U U^+ = \mathbb{1}$, und das ist $\textcircled{\text{II}} \quad \nabla$

□

Satz: Sei χ ein Charakter von G .

Dann gilt: χ irreduzibel $\Leftrightarrow \langle \chi | \chi \rangle = 1$.

Bew.: Übung!

Wir wissen: $\chi(e) = \dim(D)$, also $\chi^{(\alpha)}(e) = d^{(\alpha)}$.

Satz: D ist treue Darstellung von G

$$\Leftrightarrow (\chi(x) = \dim(D) \Leftrightarrow x = e).$$

Bew.: D treu $\Leftrightarrow \ker(D) = \{e\}$ (!)

$$\Leftrightarrow (D(x) = \mathbb{1} \Leftrightarrow x = e)$$

o.B.d.A. ist D unitär, und somit ($d = \dim(D)$):

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^d e^{i\alpha_j} \quad \text{mit } \alpha_j \in [0, 2\pi).$$

Nun ist aber klar: $\chi(x) = d$ geht nur, wenn alle EW = 1 sind, also $\chi(x) = \text{tr}(\mathbb{1}) \quad \forall$.

□

Warum nützt das?

→ Man sieht an der Charaktertafel sofort, ob eine Darstellung treu ist!

(Ex) S_3 : $|S_3| = 6$, $|\hat{G}| = 3$ (3 Part. von 3 ∇),
 $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$ eindeutig!

cl. \ Ch.	$\{e\}$ 1	$\{(12)(13)\}$ 3	$\{(123)\}$ 2	
$\chi^0 = \text{id}$	1	1	1	} nicht treu
$\chi^1 = \text{sgn}$	1	-1	1	
$\chi^2 = 2D$	2	0	-1	
				<u>treu!</u>

(Ex) S_3 .

Betrachte:

$$D((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\pi) = \delta_{\pi(i), j}}$$

$$\Rightarrow \chi(\pi) = \#(1\text{-Zyklen von } \pi) \stackrel{(!)}{\Rightarrow} \underline{D \text{ tren}}$$

Irreduzibel?

$$\langle \chi | \chi \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \underline{2} \quad \leadsto \underline{\text{nein!}}$$

$$\langle \chi^0 | \chi \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 1$$

$$\langle \chi^1 | \chi \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) = 0$$

$$\langle \chi^2 | \chi \rangle = \frac{1}{6} (1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{D \simeq D^{(0)} \oplus D^{(2)}}$$

Auf diese Weise kann man generell endlich-dim. Darstellungen von G analysieren, wenn man die Charaktertafel kennt!

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = (rs)^2 = e \rangle, \quad |D_n| = 2n$$

D_n allgemein:

(a) n gerade

4 Darstellungen der Dim. 1:

r^k	$s r^k$
1	1
1	-1
$(-1)^k$	$(-1)^k$
$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Konjugationsklassen:

- $r \sim r^{-1} \quad (s r s = r^{-1})$

$$\leadsto \{e\}, \{r^{n/2}\}, \{r^m, r^{-m}\} \quad 1 \leq m < \frac{n}{2}$$

$2 + (\frac{n}{2} - 1)$ Klassen

- $s \sim s r^{2k}$
 $s r \sim s r^{2k+1}$ } 2 Klassen

Übung: Nachrechnen!

$$w = e^{2\pi i/n}$$

$$D^m(r^k) = \begin{pmatrix} w^{mk} & 0 \\ 0 & w^{-mk} \end{pmatrix}, \quad D^m(s r^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-mk} \\ w^{mk} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^m \simeq D^{n-m} \quad \leadsto \quad 0 \leq m \leq n/2$$

$m=0$ und $m=n/2$: reduzibel!

Rest: irreduzibel! (Übung)

$$\Rightarrow \chi_m(r^k) = 2 \cos \frac{2\pi mk}{n}$$

$$\chi_m(s r^k) = 0$$

$$0 < m < \frac{n}{2}$$

Kontrolle (Burnside):

$$4 \cdot 1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 4 = 4 + 2n - 4 = 2n \quad \checkmark$$

D_n , allgemein (Forts.)

(b) n ungerade

2 Darstellungen der Dim. 1:

r^k	$s \cdot r^k$
1	1
1	-1

Konjugationsklassen:

• $r \sim r^{-1}$
 $\rightarrow \{e\}, \{r^m, r^{-m}\}$
 $1 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$

• $s \sim s r^k$
 $\rightarrow 1$ Klasse

Rest wie oben, irreduzibel für $0 < m \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$

Kontrolle:

$$2 \cdot 1 + \frac{1}{2}(n-1) \cdot 4 = 2 + 2n - 2 = 2n.$$

Zahl der Konjugationsklassen:

$$n = 2l: \quad 4 + l - 1 = l + 3,$$

und zwar:

$\{s, s r^2, \dots\}, \{s r, s r^3, \dots\}, (l+1)$ Klassen aus C_n

$$n = 2l+1: \quad l+2,$$

und zwar:

$\{s r^k\}, (l+1)$ Klassen aus C_n

$$D_\infty: \quad s^2 = 1, \quad s r s = r^{-1}$$

(Rest analog zu oben, vgl. Seite, S. 40).