Eindimensionale Darstellungen

- 1D Darstellungen stimmen mit ihren Charakteren überein
- Erinnerung: G endlich
  $\Rightarrow$ (G abelsch $\Leftrightarrow$ alle irreps sind 1D)

$\curvearrowright$ Weiterer Zusammenhang? Ja!

Def.: $[G,G] := \langle\!\langle x y x^{-1} y^{-1} \mid x, y \in G \rangle\!\rangle$
heißt Kommutator-Untergruppe von G

Prop.: (i) $[G,G]$ ist Normalteiler
(ii) $[G,G] = \{e\} \Leftrightarrow G$ abelsch.

Bew.: (ii) ist klar.
zu (i):
Beachte: $z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = zxy\underbrace{(zx)^{-1}y^{-1}y\,\overbrace{zx\,x^{-1}}^{e}}_{e}y^{-1}z^{-1}$

$$= \left\{(zx)\,y\,(zx)^{-1}y^{-1}\right\}\cdot\left(yzy^{-1}z^{-1}\right) \in [G,G].$$

Damit folgt auch: $z[G,G]z^{-1} \subseteq [G,G]$. $\square$

Def.: Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ heißt Abelisierung von G.

Ziel: Verbinde $|G/[G,G]|$ mit Zahl der 1D irreps!

Wie?

<u>Prop.:</u> $A = G/[G,G]$ ist <u>abelsch</u>.

<u>Bew.:</u> Sei $\pi : G \to A$ die kan. Projektion, und $\mathrm{Im}(\pi) = A$ nach Vor., mit π ein Homom. Sei $a = \pi(x)$, $b = \pi(y)$ für $a, b \in A$.
Dann:
$$a b a^{-1} b^{-1} = \pi(\underbrace{x y x^{-1} y^{-1}}_{\in [G,G] = \mathrm{Ker}(\pi)}) = \pi(e) = e,$$
also $ab = ba$.

$\square$

<u>Prop.:</u> Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Im}(\varphi)$ abelsch $\Leftrightarrow$
$\exists\, \psi : A \to H$ sodaß $\varphi = \psi \circ \pi$.

Im Bild:
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \{e\} \\ & H & \end{tikzcd}$$

<u>Bew.:</u> Falls $\varphi = \psi \circ \pi$, dann ist $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\psi)$, und dies muss abelsch sein, da A es ist!

Sei andererseits $\mathrm{Im}(\varphi)$ abelsch, also
$$\varphi(x y x^{-1} y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = e,$$
und $\varphi\big|_{[G,G]} \equiv e$, und es ex. ein Homom. von $G/[G,G]$ nach H mit demselben Bild wie G unter φ, d.h. ψ existiert (Standard-Argument über Faktorgruppen).

$\square$

<u>Nachtrag:</u> Das "Standard-Argument"

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G/N \arrow[r] \arrow[dl, "\psi"] & \{e\} \\ & & H & & \end{tikzcd}$$

$N = \ker(\pi)$
$\subseteq \ker(\varphi)$

Falls $\varphi|_N \equiv e$, so ex. ein Homomorphismus

ψ mit $\varphi = \psi \circ \pi$

<u>Denn:</u>
- φ "ist" eine Funktion auf den Nebenklassen, denn $\varphi(xN) = \varphi(x) \cdot \varphi(N) = \varphi(x) \cdot \{e\} = \{\varphi(x)\}$

- π "ist" Isomorphismus zwischen $\{xN \mid x \in G\}$ und G/N

- $\psi = \varphi \circ \pi^{-1}$ ist dann wohldefiniert und auch ein Homomorphismus.

$\square$

Ex Die freie Gruppe

$F_2 = \langle\langle a, b \rangle\rangle = \{$alle Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1} mit Regel $aa^{-1} = bb^{-1} = e\}$

Mult.: $w \circ w' = ww'$

(analog für F_n)

$\rightsquigarrow$ Übung

<u>Lemma:</u> Sei $\mathcal{U}$ eine (endlich-dim.) Darst. von G. Dann ist $\mathrm{Im}(\mathcal{U})$ ($\subset GL(n,\mathbb{C})$) abelsch $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ ist direkte Summe von 1D irreps.

<u>Bew.:</u> "$\Leftarrow$" Wenn alle Anteile 1D sind, können wir, durch geeigneten Basiswechsel, alle $\mathcal{U}(x)$ <u>gleichzeitig</u> diagonal machen $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(\mathcal{U})$ abelsch.

"$\Rightarrow$" Sei $\mathrm{Im}(\mathcal{U})$ abelsch, und $\mathcal{U} = \bigoplus_\beta V_\beta$ (ex.!). Dann (V_β irrep!) ist auch $\mathrm{Im}(V_\beta)$ abelsch, $\forall \beta$.

$\overset{\text{Schur I}}{\Rightarrow}$ $V_\beta(x) = \alpha_x \cdot \mathbb{1}$ für alle $x \in G$

$\Rightarrow$ Jeder Unterraum X des D.-Raumes von V_β ist invariant: also, da V_β irrep, muss $\dim(V_\beta) = 1$ sein! $\square$

<u>Satz:</u> $\boxed{\#(\text{1D irreps von } G) = |\overbrace{G/[G,G]}^{A}|}$

und die Zahl des 1D irreps teilt $|G|$.

<u>Bew.:</u> Nach den beiden Prop. sind die Darstellungen von A 1-1 zugeordnet zu den <u>abelschen</u> Darst. von G.
Diese sind nach dem Lemma gerade dir. Summen von 1D irreps.

Also: irreps von A $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ $\{\alpha \in \hat{G} \mid d^{(\alpha)} = 1\}$

Nun:

$$|\{\alpha \in \hat{G} \mid d^{(\alpha)} = 1\}| = |\hat{A}| = |A| \qquad (A \text{ abelsch!})$$
$$= |G/[G,G]|.$$

$\square$

Bem.:

$$G \text{ abelsch} \Rightarrow [G, G] = \{e\}$$

$$\Rightarrow G/[G, G] = G$$

und wir bekommen den bekannten (und benutzten) Grenzfall $|\hat{A}| = |A|$ wieder heraus!

Wir kommen nun zu einem tiefliegenden Satz, der am Ende die Dimensionen $d^{(\alpha)}$ mit der Gruppenordnung $|G|$ in Verbindung bringt:

Das Dimensions-Theorem

Def.: Sei $P \in \mathbb{Z}[x]$, also $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, (mit $a_i \in \mathbb{Z}$.)
Eine Nullstelle von P heißt algebraische Zahl, und alg. ganze Zahl, falls $a_n = 1$.

$\mathcal{A} := \{ a \in \mathbb{C} \mid a$ ist alg. ganze Zahl $\}$

Satz: Jede alg. ganze Zahl ist Eigenwert einer ganzz. Matrix, und jeder E.W. einer ganzz. Matrix ist eine alg. ganze Zahl.

Bew.: $P(x)$ (mit $a_n = 1$) ist char. Polynom der Frobenius Begleitmatrix $\left(b_{ij} = (-1)^n \cdot (\delta_{i,j+1} - \delta_{j,n} a_{i-1}) \right)$
Umkehrung ist klar!