Bem.:

G abelsch $\Rightarrow$ $[G, G] = \{e\}$

$\Rightarrow$ $G/[G, G] = G$

und wir bekommen den bekannten (und benutzten) Grenzfall $|\hat{A}| = |A|$ wieder heraus!

Wir kommen nun zu einem tiefliegenden Satz, der am Ende die Dimensionen $d^{(\alpha)}$ mit der Gruppenordnung $|G|$ in Verbindung bringt:

Das Dimensions-Theorem

Def.: Sei $P \in \mathbb{Z}[x]$, also $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, (mit $a_i \in \mathbb{Z}$.)
Eine Nullstelle von P heißt algebraische Zahl, und alg. ganze Zahl, falls $a_n = 1$.

$\mathcal{A} := \{ a \in \mathbb{C} \mid a \text{ ist alg. ganze Zahl} \}$

Satz: Jede alg. ganze Zahl ist Eigenwert einer ganzz. Matrix, und jeder E.W. einer ganzz. Matrix ist eine alg. ganze Zahl.

Bew.: $P(x)$ (mit $a_n = 1$) ist char. Polynom der Frobenius Begleitmatrix $\left(b_{ij} = (-1)^n \cdot (\delta_{i,j+1} - \delta_{j,n}\, a_{i-1})\right)$;
Umkehrung ist klar!

Die Frobenius Begleitmatrix:

$$P(x) = \underbrace{a_n}_{=1} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$B = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (\text{oder } B^t)$$

$$P(x) = \det(B - x\mathbb{1}) \qquad (\text{Bew.: Übung})$$

Dieser Zusammenhang ist äußerst nützlich in der algebraischen Zahlentheorie - und auch sonst!

Satz: $\mathcal{A}$ ist ein Ring!

Bew.: $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ $\curvearrowright$ A, B (Begleitmatrizen).
Dann sind ebenfalls ganzzahlig:

$$-A \quad , \quad A \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes B \quad , \quad A \otimes B$$

mit Eigenwerten (u.a.):

$$-\alpha \quad , \quad \alpha + \beta \quad , \quad \alpha \cdot \beta$$

also auch in $\mathcal{A}$!

$\square$

Bem.: $\dim(A) \overset{\text{i.a.}}{\neq} \dim(B)$

Beobachtung:

Prop.: Sei χ ein Charakter einer endl. Gruppe. Dann ist $\chi(G) \subset \mathcal{A}$!

Bew.: Sei $g \in G$. Dann ist $g^n = e$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und $(U(g))^n = 1\!\!1$ (U unitär o.B.d.A.); also sind die E.W. n-te Einheitswurzeln: $\lambda_i^n = 1$, und $\lambda_i \in \mathcal{A}$.
Aber $\chi(g) = \sum_i \lambda_i \in \mathcal{A}$ wegen Ringeigenschaft!

$\square$

Prop.: Sei α ein E.W. einer Matrix B mit Elementen $B_{ij} \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $\alpha \in \mathcal{A}$.

Bew.: Übung! →

Beweisidee:

Jedes $B_{ij} \in \mathcal{A}$ ↷ alle B_{ij} Nullst. von einem Polynom ↷ alle in einem Körper,

$$K = \mathbb{Q}(B_{11}, \dots, B_{nn}) \underset{\text{Hilbert}}{=} \mathbb{Q}(\beta)$$

Sogar in $\mathbb{Q}(\beta) \cap \mathcal{A} = \mathbb{Z}[\beta']$

geeignete Einheit in K

⇒ $\mathcal{B}$ ↷ größere Matrix, wo jedes Element durch ganzz. Matrix ersetzt wird (mittels $\mathbb{Z}[\beta']$ und Begleitmatrix von β')

⇒ Dann ist α immer noch EW von der "neuen" Matrix $\mathcal{B}$

⇒ $\alpha \in \mathcal{A}$

Ex $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = M$; $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; $\mathbb{Z}[\underbrace{1+\sqrt{2}}_{\lambda}]$; $1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\sqrt{2} : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$1+\sqrt{2} : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(1\cdot) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $(\sqrt{2}\,\cdot) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M x = \alpha x$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad M x' = \alpha x'$$

Satz: (Dimensionssatz)
Sei G endl. Gruppe, und $\alpha \in \hat{G}$.
Dann ist $d^{(\alpha)}$ ein Teiler von $|G|$.

Bew.: Betr.:

$$\sum_y \chi^{(\alpha)}(xy^{-1})\,\chi^{(\alpha)}(y) = \frac{|G|}{d^{(\alpha)}} \cdot \chi^{(\alpha)}(x) \qquad \text{(s.o.)}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_y B_{xy} \cdot \varphi_y = \underline{\alpha} \cdot \varphi_x$$

Also ist $\underline{\alpha}$ E.W. von B, aber $B_{xy} \in \mathcal{A}$,
somit auch $\underline{\alpha} \in \mathcal{A}$!
Nun ist aber $\underline{\alpha} = |G| / d^{(\alpha)} \in \mathbb{Q}$ (klar).
Wegen $\mathcal{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ (Bew.: Übung!)
folgt: $\underline{\alpha \in \mathbb{Z}}$. $\square$

Eine Verschärfung von Tate (ohne Beweis):

Satz: G endl., $Z(G)$ sei Zentrum von G.
Dann teilt $d^{(\alpha)}$ auch $\underbrace{|G| / |Z(G)|}_{= |G/Z(G)|}$.

Ex. G abelsch
$$Z(G) = \{ x \in G \mid xy = yx, \ \forall y \} = G$$

$$\Rightarrow Z(G) = G \quad \Rightarrow \quad |G| / |Z(G)| = 1$$
$$\Rightarrow \text{alle } d^{(\alpha)} = 1 \ !$$