

# LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

## Übungsblatt 2

- (5) Man zeige die Isomorphie der 3 Versionen von der symmetrischen Gruppe  $S_3$ , die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Führen Sie dies ebenfalls für die Versionen von  $D_4$  (die Diedergruppe des Vierecks) durch. **(2 Punkte)**

- (6) Es sei

$$\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

ausgestattet mit der Addition mod  $p$  ( $p$  prim), die zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ . Bestimmen Sie  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_p)$  (mit Beweis).

Hinweis: Diskutieren Sie, was ist die Rolle vom Bild von 1 unter einem Automorphismus.

**(2 Punkte)**

- (7) Das Zentrum einer Gruppe  $G$  ist die Menge aller Elemente, die mit allen anderen Elementen vertauschen, d.h.

$$\text{cent}(G) = \{g \in G : xg = gx \forall x \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass das Zentrum ein Normalteiler ist und bestimmen Sie das Zentrum für 3 Beispiele freier Wahl (aber nur eines abelsch). **(2 Punkte)**

- (8) Erneut sei  $G$  eine Gruppe. Der Zentralisator eines Elementes  $g \in G$  ist:

$$\text{cent}_G(g) = \{h \in G : gh = hg\}.$$

Ist dies eine Gruppe? Ist sie abelsch?

Bestimmen Sie  $\text{cent}_{D_5}(g)$  für jedes Element von  $D_5$ .

**(1+2 Punkte)**