Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 22.4.2025

LAP 3: Gruppen und ihre Darstellungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 3

(9) Sei G eine Gruppe. Wir bilden die Menge K der sogenannten Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ von Elementen $a, b \in G$. Dann bildet $H := \langle K \rangle$ einen Normalteiler in G.

Beweisen Sie dies und berechnen Sie zusätzlich die Kommutatorgruppe für 3 Beispiele Ihrer Wahl (davon sei höchstens eines abelsch!).
Illustrieren Sie anhand eines einfachen Beispiels, warum man die Erzeugungsklammer bei der Definition der Kommutatorgruppe nicht weglassen kann.

(2 Punkte)

(10) Es bezeichne $C_n (n > 0)$ die zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie (unter Verwendung von elementaren Methoden) die folgenden Aussagen:

(a) Wenn p, q teilerfremd sind, dann ist $C_{p \cdot q} \simeq C_p \times C_q$.

(b) Jede Gruppe der Ordnung p^2 (p prim) ist abelsch, und es treten nur die Typen $C_p \times C_p$ und C_{p^2} auf.

Hinweis: Es erleichtert die Rechnung, wenn man die kleineren zyklischen Gruppen geeignet als Untergruppen auffasst. Überlegen Sie sich, wie eine geeignete Einbettung aussehen kann. **(2 Punkte)**

(11) Es sei G eine abelsche Gruppe, und H Untergruppe von G.

Ist dann G/H eine Gruppe? Falls ja, warum? Überlegen Sie sich unter anderem, wie die Gruppenoperation auszusehen hat.

Ist G/H abelsch? Zeigen oder widerlegen Sie dies (mit Beweis). **(2 Punkte)**

(12) Geben Sie 4 Beispiele von Gruppen G mit Normalteiler N. Bestimmen Sie zu ihrer Wahl jeweils die Faktorgruppe G/N.
(Wie immer sollen die Gruppen nicht alle abelsch, nicht alle endlich sein).

(2 Punkte)

Abgabe bis Montag, 28.4.2025, 12 Uhr, beim Tutor (Postfach Nr. 34)!